BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 81-86.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__81_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 JUILLET 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Charliat, présenté par MM. Chailan et D. André; M. Painlevé, présenté par MM. d'Ocagne et Humbert; M. Michel, présenté par MM. d'Ocagne et Picquet; M. Adam, présenté par MM. Antomari et Caronnet.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur les équations représentables par trois systèmes réguliers de points isoplèthes.*

M. Caronnet : *Sur les hélicoïdes.*

M. Humbert : *Involutions sur les courbes algébriques.*

M. Chailan [1] fait la Communication suivante :

Sur le mouvement d'un système à liaisons complètes.

Théorème. — *Lorsqu'un système à liaisons complètes admet une position d'équilibre instable, s'il y a une fonction des forces, le système ne peut se fixer dans cette position au bout d'un temps fini.*

Considérons la trajectoire d'un point quelconque du système; la position de ce point sur sa trajectoire est définie par l'arc parcouru s. Les coordonnées de tous les points du système sont des fonctions connues de s, puisque le système est à liaisons complètes; la fonction des forces peut se mettre sous la forme $U(s)$, et la demi-force vive du système peut s'écrire $\varphi(s)\frac{ds^2}{dt^2}$, $\varphi(s)$ étant une fonction essentiellement positive, car elle est une somme de carrés.

Prenons pour origine des arcs le point de la trajectoire qui correspond à la position d'équilibre, supposons qu'entre la position initiale et cette position d'équilibre il n'y ait pas d'autre position

(1) Annexe au compte rendu de la séance du 7 juin.

d'équilibre instable, et lançons le système de façon que s décroisse.

Le théorème des forces vives donne

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = U(s) - U(o),$$

$$dt = -\frac{\sqrt{\varphi(s)}\,ds}{\sqrt{U(s)-U(o)}}.$$

Le temps que mettrait le mobile pour atteindre la position d'équilibre est donc

$$t = -\int_{s_0}^{0} \frac{\sqrt{\varphi(s)}\,ds}{\sqrt{U(s)-U(o)}}.$$

Développons $U(s)$ par la formule de Maclaurin

$$U(s) = U(o) + \frac{s}{1}U'(o) + \frac{s^2}{2!}U''(o) + \ldots.$$

Par hypothèse, $U'(o)$ est nul ; par suite, on a

$$U(s) - U(o) = s^{n+2}\psi(s) \qquad (n \geqq o),$$

la fonction $\psi(s)$ étant essentiellement positive dans l'intervalle de o à s_0. Donc

$$t = -\int_{s_0}^{0} \sqrt{\frac{\varphi(s)}{\psi(s)}}\,\frac{ds}{s^{\frac{n}{2}+1}}.$$

Cette intégrale est infinie puisque

$$\int_{\varepsilon}^{0} \frac{ds}{s^{\frac{n}{2}+1}}$$

croît sans limite, n étant supérieur ou égal à zéro.

Remarque I. — Le théorème ne serait pas applicable si, dans le voisinage de la position d'équilibre, la fonction U n'était pas développable par la formule de Maclaurin.

Par exemple, prenons un système pesant :

$$U = mgz, \qquad \frac{dU}{ds} = mg\frac{dz}{ds}, \qquad \frac{d^2U}{ds^2} = mg\frac{d^2z}{ds^2}, \qquad \text{etc.};$$

si la courbe décrite par le point d'ordonnée z présente à l'origine un point de rebroussement, la tangente en ce point étant par hypothèse horizontale, la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}$$

donne

$$\left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)_0 = x.$$

Dans ce cas, le temps est fini [1].

Remarque II. — Pour faire le développement, il est inutile de calculer U en fonction de s. En effet, si U est exprimé à l'aide d'un paramètre p, nous savons toujours calculer $\frac{dp}{ds}$, et la formule

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dp}\frac{dp}{ds}$$

permet d'obtenir toutes les dérivées de U par rapport à s.

M. Demoulin adresse la Note suivante :

Sur la relation qui existe entre les courbures totales de deux surfaces polaires réciproques par rapport à un paraboloïde de révolution.

Soient S et S′ deux surfaces polaires réciproques par rapport au paraboloïde de révolution

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

A un point quelconque M de S correspond sur S′ un point M′, pôle du plan tangent en M par rapport au paraboloïde. Les courbures totales $\frac{1}{R_1 R_2}$ et $\frac{1}{R'_1 R'_2}$ des surfaces S et S′ aux points M et M′ ont entre elles une relation très simple :

Par les points M *et* M′ *menons, parallèlement à l'axe du paraboloïde, deux droites rencontrant cette surface aux points* A *et* A′. *Cela posé,* F *étant le foyer commun à toutes les sections méridiennes, on a*

$$R_1 R_2 R'_1 R'_2 = 16\,\overline{FA}^2\,\overline{FA'}^2.$$

Pour démontrer cette formule, appelons x, y, z, p, q, r, s, t les coordonnées du point M et les dérivées des deux premiers ordres de z par rapport à x et à y ; soient x', y', z', p', q', r', s', t' les éléments analogues relatifs au point M′. Entre ces quantités exis-

[1] Despeyrous, *Mécanique*, t. I, p. 286. — Appell, *Cours de Mécanique*, t. I, p. 216.

tent les relations suivantes, bien connues en Analyse (¹) :

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = p, & y' = q, \\ x = p', & y = q', \\ (rt - s^2)(r't' - s'^2) = 1. \end{cases}$$

On a, d'autre part,

$$R_1 R_2 = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2},$$

$$R'_1 R'_2 = \frac{(1+p'^2+q'^2)^2}{r't'-s'^2};$$

multipliant ces égalités et tenant compte des relations (1), on trouve

$$(2)\qquad R_1 R_2 R'_1 R'_2 = (1+x^2+y^2)^2(1+x'^2+y'^2)^2.$$

Soient P la projection orthogonale du point A sur l'axe de révolution OZ et N le point d'intersection de cet axe avec la normale en A au paraboloïde. De la forme choisie pour l'équation du paraboloïde il résulte que $PN = 1$; on a donc

$$1 + x^2 + y^2 = \overline{AN}^2 = 2FA,$$

et de même

$$1 + x'^2 + y'^2 = 2FA'.$$

Ces deux relations, jointes à l'égalité (2), donnent la formule annoncée.

SÉANCE DU 19 JUILLET 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. F. Lucas : *Propriétés d'un système de points dans un plan.*

M. D. André : *Propriétés d'un système de points dans l'espace.*

M. Laisant : *Sur l'attraction proportionnelle à la distance et sur les forces constantes.*

M. Humbert : *Courbes tracées sur la surface des ondes.*

(¹) Voir par exemple, Camille Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. III, p. 357.

M. D'OCAGNE fait la Communication suivante :

Remarque sur la déformation des surfaces de révolution.

Soient S et S' deux surfaces de révolution dont C et C' sont les courbes méridiennes, d et d' les axes. A partir d'origines fixes A et A', prises sur C et C', portons des arcs égaux AM et A'M' et menons à ces courbes, en M et en M', leurs tangentes qui coupent d et d' respectivement en μ et en μ'. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que les surfaces S et S' soient applicables l'une sur l'autre est que, quelle que soit la longueur des arcs égaux AM et A'M', les tangentes $M\mu$ et $M'\mu'$ soient égales.

On peut déduire de là un mode de génération très simple pour les méridiennes des surfaces de révolution applicables sur une surface de révolution donnée.

On a, en effet, le théorème suivant, qui ne semble pas encore avoir été remarqué :

Soient C *une section faite dans un cylindre quelconque* Γ *par un plan* P, *d l'intersection du plan* P *par un plan p perpendiculaire aux génératrices de* Γ *et qui coupe lui-même ce cylindre suivant la courbe c. Lorsqu'on développe le cylindre* Γ *sur un plan, la courbe* C *se transforme en* C' *et la courbe c en une droite d'. Cela posé, on a cette proposition :*

La surface de révolution S *engendrée par la rotation de la courbe* C *autour de la droite d et la surface de révolution* S' *engendrée par la rotation de la courbe* C' *autour de la droite d' sont applicables l'une sur l'autre.*

En effet, si M et m sont des points de C et de c se correspondant sur une même génératrice de Γ, les tangentes à ces courbes en ces points se coupent en μ sur la droite d. Pendant le développement, le point μ vient en μ' sur la droite d'. D'autre part, l'angle $mM\mu$ et le segment Mm restant invariables, le triangle $Mm\mu$ ne subit aucune déformation et, par suite, $M'\mu' = M\mu$; enfin, dans le développement, l'arc AM conserve sa longueur; donc $\text{arc}\,A'M' = \text{arc}\,AM$.

Par conséquent, les courbes C et C' liées respectivement aux droites d et d' offrent bien le caractère rappelé plus haut pour que les surfaces de révolution S et S' qu'elles engendrent en tournant autour de ces droites soient applicables l'une sur l'autre.

On voit comment, par application de ce théorème, on pourra engendrer les méridiennes de surfaces de révolution applicables sur une surface de révolution S donnée.

Par la méridienne C de S, on fera passer un cylindre dont les génératrices, inclinées d'un angle quelconque sur le plan de C, soient à angle droit sur l'axe d de S, puis on développera ce cylindre sur un plan et la courbe C donnera ainsi naissance à C' (1).

Si la courbe C coupe d en deux points A et B et si ces points, dans le développement, viennent en A' et en B', l'axe d' est donné par la droite $A'B'$.

Si C ne coupe pas d, on choisit deux points quelconques A et B sur C; les tangentes en ces points coupant d en α et en β, on porte sur les tangentes à C', menées par les points correspondants A' et B', les segments $A'\alpha' = A\alpha$ et $B'\beta' = B\beta$. L'axe d' est alors donné par la droite $\alpha'\beta'$.

Il faut encore remarquer que lorsqu'on fait varier le plan p de l'énoncé précédent, c'est-à-dire lorsque l'axe d se déplace par rapport à la courbe C en conservant une direction fixe, la courbe C' reste la même, mais que l'axe d' se déplace également par rapport à C' en conservant la même direction.

Si, en particulier, on suppose que la courbe C soit un cercle, on obtient cette proposition :

Si la courbe C', en tournant autour de d' située dans son plan, engendre une surface applicable sur la sphère, cette courbe, en tournant autour de toute droite parallèle à d' et aussi située dans son plan, engendrera une surface applicable sur un tore.

---

(1) On peut déduire de là un moyen de tracer pratiquement la méridienne C'' connaissant la méridienne C. Supposons, en effet, qu'on ait découpé dans un plan rigide et mince un gabarit limité d'une part à la courbe C, de l'autre à l'axe d. Plaçant le bord d de ce gabarit sur une table plane T, donnons à ce gabarit une inclinaison quelconque sur la table T; puis, après l'avoir fixé dans cette situation, appliquons contre son bord curviligne C une feuille de papier un peu fort, appuyée par son bord inférieur sur la table T. Nous n'aurons qu'à marquer sur la feuille de papier la trace du bord C, puis à étendre cette feuille sur un plan pour que cette trace donne la courbe C' qui, en tournant autour de la droite d', représentée par le bord inférieur du papier, engendre une surface S'' applicable sur S. On obtient différentes surfaces S' en faisant varier l'angle du gabarit avec la table T.