

# BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

## Vie de la société

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 22 (1894), p. 116-119.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1894\\_\\_22\\_\\_116\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__116_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 JUILLET 1894.

PRÉSIDENTE DE M. DE POLIGNAC.

*Communications :*

M. Fleury : *Sur l'emploi des séries divergentes.*

M. Bioche : *Sur certaines surfaces du troisième degré.*

M. Raffy : *Remarques sur le problème général de la déformation des surfaces.*

SÉANCE DU 18 JUILLET 1894.

PRÉSIDENTE DE M. DE POLIGNAC.

*Communications :*

M. Touche : *Sur le mouvement d'un corps attiré par une droite ou deux droites rectangulaires suivant la loi de l'inverse d'une puissance positive de la distance.*

M. Kœnigs : *Sur les  $ds^2$  dits harmoniques.*

M. Raffy présente quelques observations à ce sujet.

M. Bioche : *Sur certaines surfaces du troisième degré.*

M. Blutel : *Sur quelques surfaces qui possèdent des asymptotiques cubiques.*

M. Demoulin : *Sur des couples de surfaces applicables, dont les points correspondants sont à une distance constante.*

M. P. PAINLEVÉ adresse la Communication suivante :

### **Note sur une identité entre certains déterminants.**

Dans un travail sur les équations de la Mécanique et du Calcul des variations, j'ai rencontré l'identité suivante (voir le *Journal de Mathématiques*, p. 45; 1894) :

*Soient T une fonction homogène quelconque d'ordre  $\alpha$  (1)*

---

(1)  $\alpha$  est une quantité quelconque réelle ou imaginaire.

des  $(p+1)$  variables  $x, x_1, x_2, \dots, x_p$ , et  $\tau$  la fonction obtenue en faisant  $x = 1$  dans  $T$ . Soient, d'autre part,  $\Delta$  le Hessien de  $T$ , et  $\delta$  le déterminant  $|a_{ij}|$  à  $p$  lignes et  $p$  colonnes dont le terme général  $a_{ij}$  est

$$\alpha\tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i \partial x_j} - (\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_j}.$$

Si l'on fait  $x = 1$  dans  $\Delta$ , on a identiquement

$$(1) \quad (\alpha - 1) \delta \equiv \alpha^{p-1} \Delta \tau^{p-1}.$$

On peut dire encore que le Hessien

$$\Delta_1 \equiv \frac{\delta}{\alpha^{2p} \tau \left(2 - \frac{1}{\alpha}\right)^p}$$

de la fonction

$$[T(1, x_1, x_2, \dots, x_p)]^{\frac{1}{\alpha}}$$

coïncide avec l'expression

$$\frac{\Delta}{\alpha^{p+1}(\alpha - 1)} \frac{1^p}{T^p \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{p+1}}$$

(où l'on a fait  $x = 1$ ). En particulier, si  $\alpha = 2$ ,  $\Delta$  est le discriminant de la forme quadratique  $T$  et ne dépend plus des  $x$ ; on a alors

$$\delta \equiv 2^{p-1} \Delta \tau^{p-1}, \quad \Delta_1 \equiv \frac{\Delta}{2^{p+1}} \frac{1}{\tau^{1+\frac{p}{2}}}.$$

Voici une démonstration directe bien simple de cette identité. Si l'on observe que, dans  $\delta$ , deux lignes partielles

$$\begin{aligned} & -(\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_1} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}, \quad -(\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}, \quad \dots, \quad -(\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_p} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}, \\ & -(\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_1} \frac{\partial \tau}{\partial x_l}, \quad -(\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \frac{\partial \tau}{\partial x_l}, \quad \dots, \quad -(\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_p} \frac{\partial \tau}{\partial x_l}, \end{aligned}$$

sont identiques à un facteur près, on voit, en appelant  $d$  le Hessien de  $\tau$  et  $d_i$  le déterminant obtenu en remplaçant dans  $d$  la  $i^{\text{ième}}$  ligne par la ligne

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_p},$$

que le déterminant  $\delta$  se met sous la forme

$$\delta \equiv \alpha^{\nu-1} \tau^{\nu-1} \left[ \alpha \tau d - (\alpha - 1) \left( \frac{\partial \tau}{\partial x_1} d_1 + \frac{\partial \tau}{\partial x_2} d_2 + \dots + \frac{\partial \tau}{\partial x_p} d_p \right) \right],$$

ce qui peut s'écrire

$$\delta \equiv \alpha^{\nu-1} \tau^{\nu-1} \begin{vmatrix} \alpha \tau & \frac{\partial \tau}{\partial x_1} & \frac{\partial \tau}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tau}{\partial x_p} \\ (\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_p} \\ (\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_2 \partial x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_p} & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_p} & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_2 \partial x_p} & \dots & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_p^2} \end{vmatrix}.$$

Mais, d'autre part, transformons  $\Delta$ ,

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x \partial x_p} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x_1 \partial x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x \partial x_p} & \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x_1 \partial x_p} & \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x_2 \partial x_p} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x_p^2} \end{vmatrix},$$

en tenant compte des identités d'Euler

$$x \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x^2} + x_1 \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x_j \partial x_1} + x_2 \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x_j \partial x_2} + \dots + x_p \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x_j \partial x_p} \equiv (\alpha - 1) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_j} \\ (x_j = x, x_1, \dots, x_p).$$

Si l'on multiplie la première ligne de  $\Delta$  par  $x$ , la seconde par  $x_1$ , la troisième par  $x_2$ , etc., et si l'on fait la somme, on trouve pour  $\Delta$  l'expression

$$\Delta \equiv \frac{\alpha - 1}{x} \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_p} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x_1 \partial x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x \partial x_p} & \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x_1 \partial x_p} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x_p^2} \end{vmatrix} \equiv \frac{(\alpha - 1)}{x} \Delta'.$$

Transformons maintenant  $\Delta'$  d'après l'identité d'Euler

$$x \frac{\partial T}{\partial x} + x_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \dots + x_p \frac{\partial T}{\partial x_p} \equiv \alpha T,$$

jointe aux précédentes; en multipliant la première colonne par  $x$ , la seconde par  $x_1$ , etc., et additionnant, on trouve

$$\Delta \equiv \frac{\alpha - 1}{x^2} \begin{vmatrix} \alpha T & \frac{\partial T}{\partial x_1} & \frac{\partial T}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T}{\partial x_p} \\ (\alpha - 1) \frac{\partial T}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha - 1) \frac{\partial T}{\partial x_p} & \frac{d^2 T}{\partial x_1 \partial x_p} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 T}{\partial x_p^2} \end{vmatrix};$$

d'où, en faisant  $x = 1$  dans  $\Delta$ , l'identité annoncée

$$(\alpha - 1) \delta \equiv \alpha^{p-1} \Delta \tau^{p-1}.$$

On pourrait généraliser cette identité en introduisant les dérivées de  $T$  d'ordre supérieur au second.

