Bulletin de la S. M. F.

M. D'Ocagne

Étude géométrique sur l'hélicoïde réglé le plus général

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 114-121.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__114_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR L'HÉLICOÏDE RÉGLÉ LE PLUS GÉNÉRAL;

Par M. Maurice d'Ocagne.

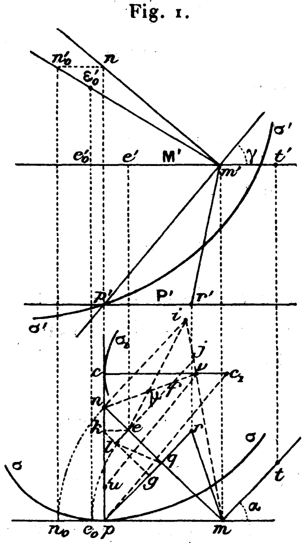
1. Je considère ici l'hélicoïde réglé le plus général, engendré par une droite qui reste tangente à un cylindre de *section quelconque* (noyau cylindrique), en rencontrant sous un angle constant une hélice tracée sur ce cylindre. On sait que cette hélice est la ligne de striction de la surface.

Le but que je me propose est de déduire géométriquement tous les éléments de courbure d'une telle surface de ceux de la section droite de son noyau cylindrique, de façon à ramener à de simples tracés linéaires toutes les constructions relatives à la courbure des lignes de la surface.

Convenons une fois pour toutes, afin de simplifier le langage dans la suite de cette étude, de prendre pour direction verticale celle des génératrices du noyau cylindrique.

2. *Plan tangent.* — Le plan tangent en tout point (m, m') de la surface est déterminé par la génératrice passant en ce point et

Fig. 1.



la tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface par ce point, la section horizontale, par exemple (*fig.* 1).

Supposons la figure projetée sur un plan horizontal perpendiculaire aux génératrices du noyau cylindrique dont la section par ce plan est la courbe σ, et sur un plan vertical parallèle à la génératrice $(pm, p'm')$ passant au point (m, m') considéré. Cette génératrice fait avec l'horizon l'angle γ.

L'hélice de striction, dont les tangentes font l'angle τ avec l'horizon, se projette horizontalement suivant la courbe σ et verticalement suivant σ'.

Cherchons la tangente au lieu décrit par la trace (m, m') de la génératrice $(pm, p'm')$ sur le plan horizontal fixe M', lorsque le point (p, p') se déplace sur l'hélice (σ, σ').

Soient pc le rayon de courbure de la courbe σ, qui est une donnée de la question, $d(p)$ la différentielle de l'arc de cette courbe au point p, ε son angle de contingence. On a

$$(1) \qquad d(p) = pc\,\varepsilon.$$

D'autre part, si mn est la normale à la section horizontale cherchée, nous avons

$$(2) \qquad d\,pm = cn\,\varepsilon.$$

Mais, si nous appelons z la distance du point p' au plan horizontal fixe M', nous avons

$$pm = z \cot\gamma,$$

d'où, puisque γ est constant,

$$d\,pm = dz \cot\gamma.$$

Comme, d'ailleurs, z diminue lorsque le point p décrit sur σ un arc positif (défini par une rotation directe autour du centre de courbure c), on doit écrire

$$dz = -\,d(p) \operatorname{tang}\tau,$$

et, par suite,

$$d\,pm = -\,d(p) \operatorname{tang}\tau \cot\gamma.$$

La formule (2) devient donc, lorsqu'on y change les signes,

$$(3) \qquad d(p) \operatorname{tang}\tau \cot\gamma = nc\,\varepsilon.$$

La division de (1) et (3) membre à membre donne

$$(4) \qquad \frac{nc}{pc} = \frac{\operatorname{tang}\tau}{\operatorname{tang}\gamma},$$

nc étant compté positivement dans le sens de p vers c.

Par suite, *pour les divers points de la même génératrice* $(pm, p'm')$, nc est constant; autrement dit, *le point n est fixe.*

Ce point a reçu le nom de *pôle* de la génératrice considérée.

Les horizontales du plan tangent en (m, m') sont parallèles à la tangente mt à la section horizontale, c'est-à-dire perpendiculaires à mn.

Cette propriété permet, soit de construire le plan tangent en un point de la génératrice considérée, soit de trouver le point où un plan mené par cette génératrice est tangent à la surface.

3. *Paramètre de distribution.* — La méthode précédente nous a permis d'établir la propriété fondamentale du pôle sans passer, comme on le fait d'ordinaire, par le calcul préalable du paramètre de distribution.

En réalité, ce paramètre, dont la considération est si importante pour l'étude des surfaces gauches en général, se trouve ici n'avoir qu'un intérêt secondaire en raison de la simplicité des constructions fondées sur l'emploi du pôle. Nous allons néanmoins faire voir comment de la formule (4) précédente se peut déduire la valeur de ce paramètre.

La formule classique de Chasles nous donne pour expression de ce paramètre k, en appelant θ l'angle que le plan tangent en (m, m') fait avec le plan central, c'est-à-dire le plan vertical passant par pm,

$$k = \frac{p'm'}{\operatorname{tang}\theta} = \frac{pm}{\cos\gamma \operatorname{tang}\theta}.$$

L'angle θ est défini en valeur absolue par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sin\gamma},$$

α étant l'angle que l'horizontale mt du plan tangent fait avec le plan vertical pm. Mais il faut observer que, lorsque les angles α et γ sont comptés dans le sens direct, l'angle θ de la formule précédente est compté dans le sens rétrograde. On devra donc prendre

$$\operatorname{tang}\theta = -\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sin\gamma}.$$

Il vient, par suite,

$$k = -pm\,\frac{\operatorname{tang}\gamma}{\operatorname{tang}\alpha},$$

ou, puisque l'angle pnm est égal à α,

$$k = -pn \operatorname{tang}\gamma.$$

Mais la formule (4) donne

$$\frac{pn}{pc} = -\frac{\operatorname{tang}\gamma - \operatorname{tang}\tau}{\operatorname{tang}\gamma}.$$

Il vient donc finalement

$$k = pc(\operatorname{tang}\gamma - \operatorname{tang}\tau). \tag{5}$$

Remarque. — Tous les résultats établis jusqu'ici, ne supposant nullement que l'angle τ soit constant, sont vrais pour toutes les surfaces gauches à cône directeur de révolution.

4. *Rayon de courbure de la section de la surface par un plan horizontal.* — La section de la surface par le plan M' est le lieu du point m lorsque le point p varie sur σ. Nous venons de voir que la normale mn à cette courbe coupe pc en un point n tel que

$$\frac{nc}{pc} = \frac{\operatorname{tang}\tau}{\operatorname{tang}\gamma}.$$

Puisque les angles τ et γ sont constants, ce rapport est constant. Donc, en vertu d'un théorème bien connu (¹), si c_1 est le centre de courbure de la développée de σ, qui est une donnée de la question, et si la normale, au lieu du point n, coupe cc_1 en v, on a

$$\frac{vc_1}{cc_1} = \frac{nc}{pc}.$$

Il suffit donc, par le symétrique u de n par rapport au milieu de pc, de mener la parallèle uv à pc_1 pour avoir le point v.

Soit maintenant e le centre de courbure cherché, c'est-à-dire le point où mn touche son enveloppe. La normale à cette enveloppe, c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en e à mn, coupe la normale nv au point f. Dès lors on a entre les différentielles des arcs décrits simultanément par les points m, n, p, les relations

$$\frac{d(m)}{d(n)} = \frac{me}{nf}, \qquad \frac{d(n)}{d(p)} = \frac{nv}{pc}, \qquad \frac{d(p)}{d(m)} = \frac{pc}{mn},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{me.nv}{nf.mn} = 1.$$

(¹) MANNHEIM, *Développements de Géométrie cinématique*, p. 16.

ou

(6) $$\frac{nv}{nf} = \frac{mn}{me}.$$

Pour tirer de cette relation une construction géométrique simple du point e, remarquons que, si la perpendiculaire élevée en n à mn coupe mv en i, la transversale ei donne dans le triangle mnv

$$\frac{iv.em.\mu n}{im.en.\mu v} = 1;$$

d'où

(7) $$\frac{\mu n}{\mu v} = \frac{im.en}{iv.em}.$$

Mais, puisque ni est parallèle à ef, on a

$$\frac{nv}{nf} = \frac{iv}{ij},$$

et, par suite, en vertu de la formule (6),

$$\frac{iv}{ij} = \frac{mn}{me},$$

d'où

$$iv.em = -ij.mn.$$

La formule (7) devient dès lors

$$\frac{\mu n}{\mu v} = -\frac{im.en}{ij.mn} = -\frac{im.ne}{ij.nm} = -1.$$

Elle montre que le point μ est le milieu de nv.

La construction du point e, une fois le point v obtenu comme il a été dit plus haut, se réduit donc à ceci : *Élever en n à mn une perpendiculaire qui coupe mv en i; la droite qui joint le point i au milieu μ de nv coupe mn au centre de courbure cherché.*

5. *Asymptotes de l'indicatrice.* — La génératrice $(mp, m'p')$ constitue une asymptote de l'indicatrice au point (m, m'). Pour avoir la seconde asymptote, nous nous fonderons sur ce que deux droites du plan tangent, conjuguées par rapport à l'indicatrice, le

sont aussi par rapport à ses asymptotes, en remarquant d'ailleurs que cette propriété est projective.

Cherchons, par exemple, la droite conjuguée de la tangente mt à la section horizontale. D'après le théorème de Dupin, cette droite est la caractéristique du plan tangent en (m, m') lorsque ce point se déplace sur la section horizontale; cette caractéristique est la droite qui joint le point (m, m') au point où la trace du plan tangent sur un plan quelconque, par exemple sur le plan horizontal P′, touche son enveloppe.

Cette trace, parallèle à l'horizontale mt du plan tangent, est la perpendiculaire pq abaissée de p sur mn. Pour trouver le point g, où pq touche son enveloppe, remarquons : 1° que, l'angle pqm étant droit, la normale à la courbe décrite par le point q passe par le point de rencontre l des normales aux enveloppes des côtés pq et qm, c'est-à-dire des perpendiculaires élevées en g et en e à ces côtés; 2° que, dans le déplacement considéré, le point p décrit non pas la courbe σ, mais bien la section horizontale de la surface passant en p, et, par suite, que la normale au lieu décrit par p, confondue avec pc, doit être considérée comme coupant cette droite au point n, ainsi que le font les normales à toutes les sections horizontales le long de pm.

Dès lors, on a entre les différentielles des arcs décrits simultanément par les points m, p, q, pour le déplacement considéré,

$$\frac{d(m)}{d(p)} = \frac{mn}{pn}, \qquad \frac{d(p)}{d(q)} = \frac{pk}{ql}, \qquad \frac{d(q)}{d(m)} = \frac{ql}{me},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{mn.pk}{pn.me} = 1,$$

ou

$$\frac{pk}{pn} = \frac{me}{mn},$$

ce qui montre que la droite ke est parallèle à pm. De là cette construction pour le point g : *Mener ek parallèlement à mp, puis kg parallèlement* à *mn*.

Puisque, en projection horizontale, les droites mg et mt sont conjuguées harmoniques par rapport à mp et à la seconde asymptote mr cherchée, et que d'ailleurs pq est parallèle à mt, *le point r est le symétrique de p par rapport à g.*

Puisque pr est la trace du plan tangent sur le plan horizontal de (pp'), *la projection verticale r' de r est sur l'horizontale de p'.*

On a donc ainsi *les asymptotes* $(mp, m'p')$ *et* $(mr, m'r')$ *de l'indicatrice* en (m, m').

6. *Indicatrice.* — Il est très facile, après cela, de construire les projections de cette indicatrice elle-même. En effet, les projections de la normale en (m, m') à la surface sont mn, perpendiculaire à la trace horizontale pq du plan tangent, et $m'n'$, perpendiculaire à la ligne de front $p'm'$ de ce plan. D'après le théorème de Meusnier, le centre de courbure de la section normale passant par $(mt, m't')$, est à la rencontre de cette normale et de la verticale du point e. Amenons le plan vertical de la normale à être de front, par rotation autour de la verticale de (m, m'). La normale se projette alors en $(mn_0, m'n'_0)$, le point (l, l') en (l_0, l'_0). Par suite, on a en ε'_0 le point où vient le centre de courbure de la section normale considérée, et $m'\varepsilon'_0$ donne le rayon de courbure R de cette section. Il suffit donc de porter sur mt le segment mt égal à $\sqrt{\lambda R}$, λ étant une longueur constante quelconque, pour avoir le point (t, t') de l'indicatrice.

Sur chacune des projections on connaît les deux asymptotes de l'indicatrice et un de ses points; cette indicatrice est donc complètement déterminée. Il serait facile de la tracer point par point.

On aurait les directions principales au point (m, m') en prenant les bissectrices des droites $(mp, m'p')$ et $(mr, m'r')$ de l'espace et les rayons de courbure principaux en déterminant la longueur des axes de l'indicatrice, problèmes faciles à résoudre au moyen d'un rabattement du plan tangent contenant l'indicatrice sur le plan horizontal passant par $(mt, m't')$.
