BULLETIN DE LA S. M. F.

G. MAUPIN

Note sur une question de probabilités traitée par d'Alembert dans l'Encyclopédie

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 185-190.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__185_0>

NOTE SUR UNE QUESTION DE PROBABILITÉS TRAITÉE PAR D'ALEMBERT DANS L'ENCYCLOPÉDIE;

Par M. G. Maupin.

Le but de la présente Note est très modeste : il consiste à rectifier des erreurs commises, sans doute par inadvertance, par d'Alembert dans un des exemples de calcul des probabilités qu'il traite dans l'*Encyclopédie*. Ce genre d'erreurs est d'ailleurs si aisé à rencontrer que Lacroix a soin, dans son *Traité élémentaire,* d'en prévenir le lecteur pour l'empêcher d'y tomber.

J'ai eu l'occasion de reproduire, dans mes *Questions d'Algèbre,* un des exemples de d'Alembert. Celui dont je vais parler, quoiqu'un peu moins simple, se résoudra sans difficulté, pouvant être ramené aux trois problèmes suivants.

Premier problème.

I. On a sept urnes, A, B, C, D, E, F, G, renfermant chacune une boule blanche, et respectivement 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 boules noires. On prend une boule successivement dans chacune d'elles : trouver la probabilité de n'avoir que des boules blanches.

Il y a une chance sur 8 de tirer de la première urne une boule blanche, une chance sur 7 de la tirer de la deuxième, ... Ces événements devant tous être concomitants, la probabilité cherchée est

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}.$$

Autrement. — Il y a 8! cas en tout; *ces cas sont également possibles* et il y a un seul cas favorable. La probabilité est

$$\frac{1}{8!}.$$

Généralement. — Pour n urnes, la probabilité est

$$\frac{1}{n!}.$$

II. *Mêmes conditions.* — De l'une des urnes, considérée au hasard, on tire une boule : probabilité pour qu'elle soit blanche.

La probabilité pour qu'on mette la main dans la première urne est $\frac{1}{7}$; la probabilité qu'il sorte une boule blanche de cette urne étant $\frac{1}{8}$, la probabilité du concours de ces deux événements est $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}$. Pour la seconde, c'est $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}$, et ainsi de suite. La probabilité totale est donc

$$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right).$$

Généralement. — Pour n urnes, on a de même

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{2}\right).$$

III. *Mêmes conditions.* — On tire une boule de chaque urne : probabilité d'en avoir au moins une blanche.

Il y a en tout $8!$ cas possibles, une seule chance de n'avoir que des boules noires, $8!-1$ chances, par suite, d'en avoir au moins une blanche.

La probabilité cherchée est

$$\frac{8!-1}{8!}.$$

Généralement. — Pour n urnes, la probabilité est

$$\frac{n!-1}{n!}.$$

Deuxième problème.

I. On prend les urnes A et B, on tire une boule de chacune : probabilité pour que les deux boules soient blanches.

C'est

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}.$$

II. *Mêmes conditions.* — On tire une boule d'une des urnes : probabilité pour qu'elle soit blanche.

C'est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{7}\right).$$

Troisième problème.

I. On prend maintenant tous les groupes de deux urnes, AB, AC, AD, AE, AF, AG, BC, ..., FG. De chacune des deux urnes d'un seul groupe on tire une boule : probabilité pour qu'elles soient toutes les deux blanches.

Il y a

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{7.6}{2} = 21 \text{ groupes.}$$

La probabilité d'en choisir un, AB par exemple, est $\frac{1}{21}$. Cela posé, il y a une probabilité $\frac{1}{8}$ de tirer une boule blanche de A, une probabilité $\frac{1}{7}$ de tirer une boule blanche de B, une probabilité $\frac{1}{8.7}$ que ces deux événements arrivent ensemble. Ainsi, la probabilité de réussir, dans ce cas, est

$$\frac{1}{21} \times \frac{1}{8.7}.$$

Si l'on joint les différentes probabilités des 21 parties de l'événement considéré, il vient

$$\frac{1}{21}\left(\frac{1}{8.7} + \frac{1}{8.6} \cdots + \frac{1}{8.2} + \cdots + \frac{1}{3.2}\right).$$

En général. — Pour un nombre n de boules, la probabilité est

$$\frac{2}{(n-1)(n-2)}\left[\frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-2)} + \cdots + \frac{1}{n.2} + \cdots + \frac{1}{3.2}\right].$$

II. *Mêmes conditions.* — De l'une seulement des deux urnes d'un seul des groupes on tire une boule : probabilité pour qu'elle soit blanche.

Il y a une chance sur vingt et une de choisir par exemple le premier groupe. Ensuite, il y a une chance sur deux de prendre dans ce groupe l'urne A, une chance sur deux aussi de prendre l'urne B. Par suite, la probabilité de prendre la bille blanche est, dans A,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8},$$

dans B,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7},$$

dans le groupe,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{7}\right).$$

Cela donne, pour probabilité de réussite dans cette première expérience,

$$\frac{1}{21}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{7}\right),$$

et, en tout,

$$\frac{1}{21}\times\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right).$$

En général. — Pour n boules, la probabilité est

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{2}\right).$$

Voici maintenant la question de d'Alembert : les indications α, β, γ, δ ont été placées pour faciliter le langage.

« Pierre tient huit cartes dans ses mains, qui sont : un as, un deux, un trois, un quatre, un cinq, un six, un sept et un huit, qu'il a mêlées : Paul parie que, les tirant l'une après l'autre, il les devinera à mesure qu'il les tirera. On demande combien Pierre doit parier contre un que Paul ne réussira pas dans son entreprise? »

« Par l'énoncé de la question, on suppose que Paul parie de tirer toutes les cartes l'une après l'autre, sans les remettre dans le jeu après les avoir tirées, et sans manquer une seule fois à deviner juste la carte qu'il tirera. »

(α) « Dans ce cas, l'espérance de Paul au premier coup est $\frac{1}{8}$, au second $\frac{1}{7}$; d'où il s'ensuit que son espérance pour les deux premiers coups est $\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}$; et, en effet, il est aisé de voir que le premier coup ayant huit cas possibles, et le second sept, la combinaison des deux aura 8×7 coups, dont il n'y en a qu'un seul qui fasse gagner Pierre, celui où il devinera juste deux fois de suite. Par la même raison, l'espérance de Pierre pour trois coups sera $\frac{1}{8} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{6}$; pour quatre, $\frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$; et, pour sept (car il n'y en peut avoir huit, attendu qu'après sept tirages il ne reste plus de cartes à tirer, et il n'y a plus de jeu), elle sera $\frac{1}{8} \times \frac{1}{7} \times \ldots \times \frac{1}{2}$; donc l'enjeu de Pierre sera à celui de Paul comme $8 \times 7 \times \ldots \times 2 - 1$ est à 1, c'est-à-dire comme $56 \times 720 - 1$ est à 1, ou comme $40\,319$ est à 1. »

(β) « Si Paul parioit d'amener ou de deviner juste à un des sept coups seulement, son espérance seroit $\frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2}$, et par conséquent l'enjeu de Pierre à celui de Paul, comme $\frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2}$ à $1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{7} - \ldots - \frac{1}{2}$. »

(γ) « Si Paul parioit d'amener juste dans les deux premiers coups seulement, son espérance seroit $\frac{1}{8} + \frac{1}{7}$, et le rapport des enjeux celui de $\frac{1}{8} + \frac{1}{7}$ à $1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{7}$. »

(δ) « S'il parioit d'amener juste dans deux coups quelconques, son espérance seroit

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{6} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{6} \times \frac{1}{5}, \ldots \text{ » } (^1)$$

D'Alembert entend évidemment qu'après chaque épreuve on connaît la carte enlevée, et que, par suite, on doit s'abstenir de nommer celle-ci aux épreuves suivantes. Autrement dit, à chaque épreuve on connaît exactement la nature des cartes qui composent le paquet sur lequel on opère.

Cela posé, le cas (α) correspond au *premier Problème*, I. Le raisonnement est exact.

Dans le cas (β), l'espérance indiquée pour Paul est supérieure

(1) D'ALEMBERT, *Encyclopédie*, t. I, p. 306-307.

à l'unité, ce qui est absurde. D'Alembert veut-il dire qu'on fait les sept épreuves successivement? Alors c'est le *premier Problème,* III. On peut aussi supposer que Paul choisisse, parmi les sept épreuves, celle sur laquelle il se propose de deviner juste, et alors c'est le *premier Problème,* II. Il semble bien que d'Alembert se soit placé dans cette dernière hypothèse, en omettant le facteur $\frac{1}{7}$.

Dans le cas (γ), suivant que Paul veut amener juste dans chacun des deux coups ou dans un des deux seulement, on se trouve dans les hypothèses I ou II du *deuxième Problème*. Sans doute dans l'hypothèse II, et le facteur $\frac{1}{2}$ a été oublié.

Enfin, dans le cas (δ), Paul parie-t-il d'amener juste dans les deux coups quelconques ou dans un seul de ces deux coups. On est, suivant l'hypothèse, dans les parties I ou II du *troisième Problème*. A examiner le résultat de d'Alembert, il semblerait que ce géomètre, ayant perdu de vue le cas (γ), se soit placé cette fois dans l'hypothèse I, et qu'il ait omis le facteur $\frac{1}{21}$.