Bulletin de la S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 1-6.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 9 JANVIER 1895.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

La Société procède, en Assemblée générale, au renouvellement de son bureau et à l'élection de quatre membres du Conseil.

Sur la proposition de M. Laisant, l'Assemblée, prenant en considération l'étude d'un projet d'organisation de Congrès mathématiques internationaux, renvoie au Conseil de la Société l'examen de ce projet.

Communications :

M. Lancelin : *Sur les lignes géodésiques des surfaces minima.*

M. Mannheim adresse la Communication suivante :

Sur les lignes de courbure des surfaces du second ordre.

A la fin de l'intéressante Communication qu'il a faite à la Société mathématique de France [1], M. Paul Adam dit : *Sur ces ellipsoïdes, les lignes de courbure se correspondent avec parallélismes des plans tangents.*

Prenons alors deux surfaces du second ordre (S), (S′), sur les-

---

[1] Voir *Bulletin*, tome XXII, page 208.

quelles on a les lignes de courbure C, C′ qui se correspondent avec parallélisme des plans tangents à (S) et (S′).

Circonscrivons à (S) le long de C une surface développable. Appelons mg, mt la génératrice de cette surface et la tangente à C pour le point m de cette courbe. Sur C′ au point m', correspondant à m, soient de même $m'g'$, $m't'$ la génératrice de la surface développable circonscrite à (S′) le long de C′ et la tangente à cette courbe.

Les plans tangents à ces deux surfaces développables successivement aux points correspondants sur (S), (S′) étant parallèles, les droites mg, $m'g'$ sont parallèles et, par suite, comme leur étant respectivement perpendiculaires, dans des plans parallèles, les droites mt, $m't'$ sont aussi parallèles. Ainsi :

Sur (S), (S′) *les lignes de courbure se correspondent avec parallélisme de leurs tangentes.*

Les axes de la section faite dans (S) par un plan parallèle au plan tangent en m sont parallèles à mg, mt. De même pour (S′) coupée par un plan parallèle au plan tangent en m'. Mais les plans tangents en m, m' sont parallèles et les droites mg, mt sont parallèles à $m'g'$, $m't'$, donc :

La section faite dans (S) *par un plan arbitraire et la section faite dans* (S′) *par un plan parallèle à celui-ci sont des courbes dont les axes sont parallèles.* De là, on peut conclure que *les plans des sections circulaires de* (S) *et de* (S′) *sont parallèles.*

Je vais démontrer directement cette propriété. Comme on peut transporter (S) ou (S′) parallèlement à elle-même sans altérer la propriété relative aux lignes de courbure de ces surfaces, supposons qu'elles aient même centre o. De ce point comme centre décrivons une sphère. Elle coupe (S) suivant une courbe que nous prenons comme directrice d'un cône de sommet o. Les génératrices de ce cône rencontrent à angle droit cette directrice et alors un plan tangent à ce cône détermine dans (S) une section qui a pour axe la génératrice de contact de ce plan tangent.

Ce cône coupe (S′) suivant une courbe qui doit rencontrer cette génératrice à angle droit puisque, d'après ce qui précède, cette génératrice est un axe de la section faite dans (S′) par le même plan tangent au cône. Il résulte de là que le cône coupe (S′) suivant une ligne sphérique.

Parmi les sphères de centre o, prenons celle qui coupe (S) suivant deux cercles. Le cône précédent se réduit alors à deux plans; ceux-ci, devant couper (S′) suivant une ligne sphérique, la coupent suivant deux cercles.

On voit ainsi que les plans qui coupent (S) suivant des cercles coupent aussi (S′) suivant des cercles. Mais, comme on peut prendre des surfaces homothétiques à (S) et (S′) et les transporter ensuite parallèlement à elles-mêmes sans altérer la propriété qui a servi de point de départ, on peut dire :

Si des surfaces du second ordre sont telles que leurs lignes de courbure se correspondent avec parallélisme de leurs plans tangents, les plans de leurs sections circulaires sont parallèles.

Démontrons maintenant la propriété réciproque de celle-ci. Pour cela, je vais d'abord établir cette proposition :

Si des surfaces du second ordre passent par deux cercles ayant même diamètre, un plan arbitraire les coupe suivant des courbes dont les axes sont parallèles.

Appelons (Σ) la sphère qui contient ces deux cercles et (P) un plan sécant arbitraire.

Ce plan coupe les surfaces du second ordre suivant des coniques qui ont en commun les quatre points d'intersection de (P) et des deux cercles. Mais ces quatre points sont sur le cercle d'intersection de (P) et de (Σ). Il suffit alors de prendre les bissectrices des angles formés par les diagonales du quadrilatère qui a ces quatre points pour sommets, afin d'obtenir les directions des axes des coniques passant par ces quatre points. Ces courbes ont donc des axes parallèles.

Aux surfaces qui interviennent dans cette proposition, on peut substituer des surfaces qui leur sont homothétiques et transporter celles-ci individuellement dans des directions arbitraires; on voit ainsi que :

Si des surfaces ont les mêmes directions pour les plans de leurs sections circulaires, elles sont coupées par des plans parallèles suivant des courbes dont les axes sont parallèles.

Prenons deux de ces surfaces (S), (S′) et sur (S) la ligne de courbure C. Circonscrivons à (S) une surface développable le long de C. Au point m de C la génératrice de cette surface est mg et la tangente à C est mt.

Circonscrivons à (S′) une surface développable dont les plans tangents sont parallèles aux plans tangents de la surface circonscrite à (S). Soit m' le point de contact avec (S′) du plan tangent à cette surface qui est parallèle au plan tangent en m à (S). La génératrice $m'g'$ de la surface développable circonscrite à (S′) est parallèle à mg. Cette droite $m'g'$ est conjuguée de la tangente $m't'$ de la courbe de contact de (S′) et de la surface développable qui lui est circonscrite.

Coupons (S) et (S′) par un plan parallèle au plan tangent en m ou en m'. Les courbes d'intersection ont des axes parallèles ; par suite $m'g'$ est parallèle à un axe de la section faite dans (S′) par le plan sécant. La direction conjuguée de $m'g'$ lui est alors perpendiculaire; donc les génératrices de la surface développable circonscrite à (S′) rencontrent à angle droit la courbe de contact de ces deux surfaces : cette courbe est donc une ligne de courbure de (S′). Nous pouvons alors dire :

Si les plans des sections circulaires de surfaces du second ordre sont parallèles, les lignes de courbure de ces surfaces se correspondent avec parallélisme des plans tangents.

M. Laisant présente la Note suivante :

Sur les courbes gauches algébriques auto-corrélatives;

Par M. Gino Loria.

D'après Plücker ([1]), on considère, dans les courbes planes algébriques douées de singularités ordinaires, six nombres caractéristiques : l'ordre et la classe, les nombres de points doubles et de tangentes doubles, et les nombres de points d'inflexion et de rebroussement.

Ces caractéristiques sont évidemment corrélatives par couple;

([1]) *Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes* (*Journal de Crelle*, t. XII; 1834). *Theorie der algebraischen Curven* (Bonn, 1839).

et M. Bioche ([1]) a prouvé que, *en général,* l'égalité de deux nombres d'un même couple entraîne l'égalité des nombres des deux autres; il y a cependant quatre courbes particulières qui font exception.

D'après M. Cayley ([2]), on considère, dans les courbes gauches algébriques douées de singularités ordinaires, dix nombres caractéristiques. Ce sont avant tout l'ordre m de la courbe, le nombre a de ses points de rebroussement, le nombre c de ses points doubles apparents, y compris les points doubles effectifs s'il y en a, et l'ordre d de la courbe double de la développable osculatrice. Comme une courbe gauche est le noyau d'un système de points, plans et droites, il y a lieu de considérer quatre autres nombres, dont les définitions sont corrélatives à celles des nombres précédents et que nous désignerons respectivement par les lettres μ, α, γ, δ. On a encore deux nombres qui sont auto-corrélatifs : ce sont le rang R de la courbe et le nombre T des génératrices stationnaires de la développable correspondante.

Cela posé, le problème résolu par M. Bioche mène naturellement à se demander si, pour les courbes à double courbure, l'égalité de deux nombres corrélatifs entraîne l'égalité des autres. Essayons de répondre à cette question.

Rappelons, à cet effet, qu'entre les dix nombres définis ci-dessus ont lieu les six relations suivantes, que M. Cayley a découvertes :

$$\mu = R(R-1) - 2d - 3(m+T), \qquad m = R(R-1) - 2\delta - 3(\mu + T),$$
$$R = \mu(\mu-1) - 2\gamma - 3\alpha, \qquad R = m(m-1) - 2c - 3a,$$
$$m + T - \alpha = 3(R-\mu), \qquad \mu + T - a = 3(R-m).$$

On en tire :

$$\mu - m = d - \delta,$$
$$\alpha - a = 2(\mu - m),$$
$$2(\gamma - c) = (\mu - m)(\mu + m - 7).$$

Ces dernières égalités prouvent que l'une des égalités $\mu = m$, $\alpha = a$, $\delta = d$ entraîne les autres et même $\gamma = c$. Mais, si l'on part

---

([1]) *Sur les singularités des courbes algébriques planes* (*Bulletin de la Soc. Mathém.*, t. XX, p. 67; 1892).

([2]) *Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables* (*Journal de Liouville*, t. X, 1845; ou bien *The collected mathematical papers,* vol. I, p. 207-211; 1889).

de la supposition $\gamma = c$, on arrive à $\mu = m$ et ensuite à $\delta = d$, $\alpha = a$, ou bien à $\mu + m = 7$. On voit donc que l'égalité de deux nombres caractéristiques corrélatifs entraîne l'égalité des autres, excepté pour les courbes dont l'ordre et la classe ont pour somme 7. Or l'équation indéterminée

$$m + \mu = 7$$

a évidemment huit solutions. Il est clair que les solutions (0, 7), (1, 6), (2, 5) ne correspondent à aucune courbe algébrique simple; on doit donc les exclure, ainsi que les solutions corrélatives (7, 0), (6, 1), (5, 2). Restent les deux solutions (3, 4) et (4, 3). Or, on sait qu'une courbe gauche simple du troisième ordre est de la troisième classe; par conséquent, la solution (3, 4) ne peut correspondre qu'à une courbe plane et précisément à une cubique plane douée de quatre points d'inflexion; mais une telle courbe n'existe pas [1]. On prouve de la même manière que la solution (4, 3) ne peut correspondre à aucune courbe algébrique simple. Par conséquent, on peut énoncer ce théorème :

Dans toute courbe gauche algébrique, douée de singularités ordinaires, l'égalité de deux caractéristiques corrélatives entraîne l'égalité des trois autres couples analogues.

SÉANCE DU 23 JANVIER 1895.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

Communications :

M. Painlevé : *Sur la transformation des équations de la Mécanique.*

M. Desaint : *Sur la théorie des fonctions.*

M. Humbert : *Sur l'extension du théorème de Poncelet à la surface de Kummer.*

M. Fouret : *Remarque sur une Communication récente de M. Mannheim.*

M. Humbert présente quelques observations sur le même sujet.

---

(1) *Voir*, par exemple, dans les *Vorlesungen über Geometrie* von A. CLEBSCH, I Band (Leipzig, 1876), le Tableau de la page 353.