

BULLETIN DE LA S. M. F.

H. VON KOCH

**Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions
définies par des fractions continues**

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 33-40.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__33_0

© Bulletin de la S. M. F., 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR UN THÉORÈME DE STIELTJES ET SUR LES FONCTIONS DÉFINIES
PAR DES FRACTIONS CONTINUES;**

Par M. H. VON KOCH.

I.

Je me propose de démontrer d'abord ce théorème :

Si h_1, h_2, \dots sont des fonctions analytiques d'un nombre quelconque de variables x_1, x_2, \dots, x_k , holomorphes dans un domaine donné T, si la série

$$(1) \quad \sum_{\nu} |h_{\nu}|$$

converge uniformément dans ce domaine, et si

$$\frac{P_n(x_1, \dots, x_k)}{Q_n(x_1, \dots, x_k)}$$

désigne la n^{ième} réduite de la fraction continue

$$(2) \quad \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{h_3 + \dots}}}$$

on a, pour tout le domaine T,

$$\lim P_{2n}(x_1, \dots, x_k) = P(x_1, \dots, x_k),$$

$$\lim Q_{2n}(x_1, \dots, x_k) = Q(x_1, \dots, x_k),$$

$$\lim P_{2n+1}(x_1, \dots, x_k) = P_1(x_1, \dots, x_k),$$

$$\lim Q_{2n+1}(x_1, \dots, x_k) = Q_1(x_1, \dots, x_k),$$

P, Q, P₁, Q₁ désignant des fonctions holomorphes dans T qui satisfont à la relation

$$Q(x_1, \dots, x_k) P_1(x_1, \dots, x_k) - Q_1(x_1, \dots, x_k) P(x_1, \dots, x_k) = 1.$$

On voit que ce théorème embrasse comme cas particulier le théorème de Stieltjes ⁽¹⁾ relatif à l'oscillation de la fraction con-

(1) STIELTJES, *Recherches sur les fractions continues (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. VIII, 1894).*

tinue (2) dans le cas où l'on a

$$h_{2n} = a_{2n}, \quad h_{2n+1} = a_{2n+1}z,$$

les a_i étant des constantes réelles et positives et z une variable complexe.

Pour la démonstration, remarquons que les formules de récurrence

$$(3) \quad \begin{cases} Q_\rho = h_\rho Q_{\rho-1} + Q_{\rho-2} & (Q_0 = 1, Q_{-1} = 0) \\ & (\rho = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

mettent en évidence que $Q_{\rho+2p}$ se réduit identiquement à Q_ρ , quand on y fait

$$h_{\rho+2p} = h_{\rho+2p-1} = \dots = h_{\rho+1} = 0.$$

Or, dans le développement du produit

$$\prod_{v=1}^{\rho+2p} (1 + h_v),$$

on retrouve tous les termes du polynôme $Q_{\rho+2p}$. Donc, puisque ce produit se réduit à

$$\prod_{v=1}^{\rho} (1 + h_v),$$

quand on y fait $h_{\rho+2p} = \dots = h_{\rho+1} = 0$, on aura nécessairement

$$(4) \quad Q'_{\rho+2p} - Q'_\rho \leq \prod_{v=1}^{\rho+2p} (1 + |h_v|) - \prod_{v=1}^{\rho} (1 + |h_v|),$$

Q'_v désignant ce que devient le polynôme Q_v quand on y remplace chaque terme par sa valeur absolue. Or, puisque la série $\sum_v |h_v|$ est supposée uniformément convergente dans le domaine T , à tout nombre positif ε correspondra un entier positif ρ' tel que le second membre de la formule (4) devienne moindre que ε dès que l'on a $\rho \geq \rho'$, et cela pour tout le domaine T et pour des valeurs quelconques de p ; on aura donc *a fortiori*

$$|Q_{\rho+2p} - Q_\rho| \leq Q'_{\rho+2p} - Q'_\rho < \varepsilon;$$

donc les deux séries

$$1 + \sum_{\nu=1}^{+\infty} (Q_{2\nu} - Q_{2\nu-2}), \quad \sum_{\nu=0}^{+\infty} (Q_{2\nu+1} - Q_{2\nu-1})$$

convergent uniformément dans T et représentent, par suite, certaines fonctions $Q(x_1, \dots, x_k)$ et $Q_1(x_1, \dots, x_k)$ holomorphes dans ce domaine, ce qui prouve bien que les limites

$$\lim Q_{2n} = Q, \quad \lim Q_{2n+1} = Q_1$$

sont des fonctions holomorphes dans T .

Puisque les P_ρ satisfont à des formules de récurrence de la même forme

$$P_\rho = h_\rho P_{\rho-1} + P_{\rho-2} \quad (P_0 = 0, P_{-1} = 1) \\ (\rho = 1, 2, 3, \dots),$$

on voit de la même manière que l'on a, pour tout le domaine T ,

$$\lim P_{2n} = P, \quad \lim P_{2n+1} = P_1,$$

P et P_1 étant des fonctions de x_1, \dots, x_k holomorphes dans T .

Vu que les fonctions $Q_{2n}, P_{2n}, Q_{2n+1}, P_{2n+1}$ sont liées par l'identité

$$Q_{2n} P_{2n+1} - Q_{2n+1} P_{2n} = 1,$$

il est clair que leurs limites Q, P, Q_1, P_1 y satisfont également :

$$QP_1 - Q_1P = 1.$$

Le théorème est donc démontré.

Remarquons enfin que le polynôme Q_ρ , écrit sous la forme d'un déterminant d'ordre ρ

$$Q_\rho = \begin{vmatrix} h_1 & 1 & & & \\ -1 & h_2 & 1 & & \\ & -1 & h_3 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 & h_\rho \end{vmatrix}$$

fournit le premier exemple d'un déterminant infini qui prend deux valeurs différentes Q et Q_1 selon que son ordre indéfiniment croissant ρ est assujéti à rester pair ou impair.

II.

Dans une lettre à M. Poincaré, dont un extrait a été publié récemment (1), j'ai démontré, entre autres, deux théorèmes, qui pourront être énoncés en ces termes :

I. Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ sont des fonctions analytiques d'un nombre quelconque de variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_k , si ces fonctions sont holomorphes dans un domaine continu donné T , et si la série

$$(5) \quad \sum_v |\varphi_v|$$

converge uniformément dans ce domaine, la fraction continue

$$(6) \quad \frac{\varphi_1}{1 + \frac{\varphi_2}{1 + \frac{\varphi_3}{1 + \dots}}}$$

représente une fonction $\Theta(x_1, \dots, x_k)$ qui, dans tout le domaine T , reste méromorphe et peut s'exprimer par le quotient de deux fonctions φ, Δ' et Δ holomorphes dans T .

II. Soit T_1 un domaine continu quelconque situé tout entier en dedans de T et tel que la somme S de la série

$$(7) \quad S = \sum_{v=2}^{+\infty} |\varphi_v|$$

γ satisfasse à la condition

$$(8) \quad S < \rho,$$

ρ désignant un nombre positif suffisamment petit. Dans tout ce domaine T_1 , la fonction $\Theta(x_1, \dots, x_k)$, définie par la fraction continue (6), restera nécessairement holomorphe.

(1) Sur la convergence des déterminants d'ordre infini et des fractions continues. Extrait d'une lettre de M. H. von Koch à M. Poincaré. (Comptes rendus, 21 janvier 1895.)

Dans l'énoncé précédent, Δ désigne le déterminant infini

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ -\varphi_2 & 1 & & & & \\ & & -\varphi_3 & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{vmatrix},$$

et Δ' ce que devient Δ quand on y supprime la première ligne et la première colonne; ces déterminants infinis Δ et Δ' convergent absolument et uniformément en dedans du domaine T, d'après deux lemmes que j'ai énoncés dans la Note citée plus haut et dont j'ai donné les démonstrations, d'ailleurs très simples, dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Stockholm, le 13 février 1895.

Dans la première Note, j'ai montré que le théorème II reste certainement vrai si l'on pose, dans l'inégalité (8), $\rho = \frac{1}{2}$; dans la seconde, j'ai remplacé cette limite par la suivante :

$$\rho = \log 2 = 0,69314718\dots$$

Je me propose maintenant d'étendre ces résultats en démontrant que le théorème II reste encore vrai si l'on pose, dans l'inégalité (8),

$$\rho = 1.$$

Pour cela, il faut d'abord démontrer le lemme suivant :

Si b_2, b_3, \dots sont des nombres positifs quelconques, la fraction continue d'ordre ν

$$(9) \quad \frac{1}{1 - \frac{tb_2}{1 - \frac{tb_3}{1 - \dots - \frac{tb_{\nu-1}}{1 - tb_\nu}}}}$$

représente une fonction $f(t)$ développable sous la forme

$$f(t) = 1 + f_1 t + f_2 t^2 + \dots,$$

f_ν désignant un certain polynôme homogène, à coefficients en-

tiers et positifs, et de degré ν par rapport à b_2, \dots, b_ν , qui satisfait à l'inégalité

$$(10) \quad f_\lambda < (b_2 + b_3 + \dots + b_\nu)^\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \dots).$$

En effet, supposons ce théorème valable pour une fraction de la forme (9) d'ordre $\nu - 1$; nous aurons

$$\frac{1}{1 - \frac{tb_3}{1 - \frac{tb_4}{1 - \dots - \frac{tb_{\nu-1}}{1 - tb_\nu}}}} = \psi(t) = 1 + \psi_1 t + \psi_2 t^2 + \dots,$$

ψ_λ étant un polynôme homogène, à coefficients entiers et positifs et de degré λ par rapport à b_3, b_4, \dots, b_ν .

De là on conclut qu'en posant

$$f(t) = \frac{1}{1 - tb_2 \psi(t)} = 1 + f_1 t + f_2 t^2 + \dots$$

les f_λ seront de pareils polynômes par rapport à b_2, b_3, \dots, b_ν . Il reste seulement à démontrer l'inégalité (10).

Par hypothèse, les ψ_λ satisfont aux conditions

$$\psi_\lambda < B^\lambda,$$

où l'on a posé $B = b_3 + b_4 + \dots + b_\nu$. Donc les coefficients dans le développement de la fonction $f(t)$ seront moindres que les coefficients correspondants dans le développement de la fonction

$$\frac{1}{1 - \frac{tb_2}{1 - tB}} = \frac{1 - tB}{1 - t(b_2 + B)};$$

donc, *a fortiori*, ils seront moindres que les coefficients dans le développement de

$$\frac{1}{1 - t(b_2 + B)},$$

ce qui conduit bien à l'inégalité (10).

Le lemme, étant visiblement vrai pour une fraction d'ordre 3, se trouve donc démontré dans le cas général.

Revenons à l'étude de la fraction (6), les φ_ν étant des fonctions

de x_1, \dots, x_k telles que la série $\sum |\varphi_\nu|$ converge uniformément dans T ; supposons de plus

$$(11) \quad S = \sum_{\nu=2}^{+\infty} |\varphi_\nu| < 1$$

dans tout le domaine T_1 .

Au lieu de (6), considérons pour un instant la fraction suivante (t désignant une variable auxiliaire)

$$F(t) = \frac{1}{1 - \frac{t\varphi_2}{1 - \frac{t\varphi_3}{1 - \dots}}}$$

et désignons la $\nu^{\text{ième}}$ réduite de cette fraction par $F_\nu(t)$; d'après ce que nous savons, $F(t)$ et $F_\nu(t)$ sont des fonctions holomorphes dans un cercle ayant l'origine pour centre et un rayon R suffisamment petit. Or la relation

$$F(t) - F_\nu(t) = t^\nu \frac{\varphi_2 \varphi_3 \dots \varphi_{\nu+1}}{N_\nu [N_{\nu+1} + N_\nu F^{(\nu+2)}]}$$

où l'on a posé

$$F^{(\nu+2)} = - \frac{t\varphi_{\nu+2}}{1 - \frac{t\varphi_{\nu+3}}{1 - \dots}}, \quad N_\nu = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ t\varphi_2 & 1 & 1 & & \\ & t\varphi_3 & 1 & 1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & t\varphi_\nu & 1 \end{vmatrix},$$

montre que le développement de $F(t) - F_\nu(t)$ commence par un terme en t^ν ; en d'autres termes, si l'on pose

$$F(t) = 1 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots,$$

$$F_\nu(t) = 1 + A_1^{(\nu)} t + A_2^{(\nu)} t^2 + \dots,$$

on a

$$A_1 = A_1^{(\nu)}, \quad A_2 = A_2^{(\nu)}, \quad \dots, \quad A_{\nu-1} = A_{\nu-1}^{(\nu)}.$$

Mais, d'après le lemme démontré tout à l'heure, on a

$$|A_\lambda^{(\nu)}| < (|\varphi_2| + |\varphi_3| + \dots + |\varphi_\nu|)^\lambda.$$

On a donc, d'une manière générale,

$$|A_\lambda| < S^\lambda \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots).$$

Désignons maintenant par $\Theta_\nu(x_1, \dots, x_k)$ la $\nu^{\text{ième}}$ réduite de la fraction (6). Nous aurons

$$\Theta_\nu(x_1, \dots, x_k) = \varphi_1 F_\nu(-1),$$

d'où, en vertu de ce qui vient d'être établi et de l'inégalité (11),

$$|\Theta_{\nu+p}(x_1, \dots, x_k) - \Theta_\nu(x_1, \dots, x_k)| < 2|\varphi_1| \frac{S^\nu}{1-S},$$

p désignant un entier positif quelconque. Par là on voit donc que, tant que les variables x_1, \dots, x_k restent dans le domaine T_1 satisfaisant à la condition (11), la réduite $\Theta_\nu(x_1, \dots, x_k)$ tendra uniformément vers une limite $\Theta(x_1, \dots, x_k)$ et que cette limite représente, dans tout le domaine T_1 , une fonction *holomorphe* de x_1, \dots, x_k .
