Bulletin de la S. M. F.

P. Adam

Sur un problème de déformation

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 28-35.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__28_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UN PROBLÈME DE DÉFORMATION;

Par M. Paul Adam.

M. Goursat a posé et résolu (¹) le problème suivant :

Trouver la surface la plus générale (S) *susceptible de se déformer de façon qu'une série de sections planes dont les plans sont parallèles se change en une série de sections planes dont les plans soient parallèles.*

Il a obtenu, pour les équations de cette surface,

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} y &= f(x)\,\theta_1(a) + \eta_1(a), \\ z &= f(x)\,\theta\,(a) + \eta\,(a); \end{aligned} \right.
$$

(¹) *American Journal of Mathematics*. Vol. XIV.

f est une fonction arbitraire et, des quatre fonctions θ, θ_1, η, η_1, deux seulement sont arbitraires (elles sont liées par deux relations).

Il a donné un mode de génération élégant de cette surface.

Il a montré enfin que les surfaces (S′) applicables sur la surface (S) de manière à satisfaire à l'énoncé du problème ont comme équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \int \sqrt{1 + nf'^2(x)}\, dx, \\ Y &= f(x)\,\Theta_1(a) + H_1(a), \\ Z &= f(x)\,\Theta\,(a) + H\,(a); \end{aligned}\right.$$

n est une constante arbitraire et les quatre fonctions Θ, Θ_1, H, H_1, se calculent au moyen des quatre fonctions θ, θ_1, η, η_1.

Sur les surfaces (S) et (S′), les courbes (x) sont les courbes correspondantes situées dans des plans parallèles.

Ainsi que l'a fait remarquer M. Goursat, ces surfaces sont des sortes de moulures dont le profil variable est représenté par les courbes (a), lesquelles sont planes et dans des plans parallèles à l'axe des x.

Il est facile de s'assurer, au moyen du travail de M. Goursat, que le calcul des quatre fonctions Θ, Θ_1, H, H_1 à l'aide des fonctions θ, θ_1, η, η_1, n'introduit pas de constantes arbitraires propres à faire varier la forme ou la grandeur des surfaces (S′); ces surfaces dépendent donc au fond du seul paramètre arbitraire n quand (S) est donnée : c'est dire que la surface (S) se transforme en les surfaces (S′) par une déformation continue, au moins au point de vue analytique, et parfaitement déterminée. Cette remarque était nécessaire pour donner de la précision à ce qui va suivre.

La déformation subie par la surface (S) pour passer aux surfaces (S′) présente un caractère intéressant qu'il est facile de mettre en évidence.

C'est l'objet de cette Note.

Pour simplifier le langage, disons que les surfaces (S′) sont *associées* à la surface (S), et appelons *profils* et *directrices* de ces surfaces les courbes (a) et (x).

Étant donnée une surface (S) et ses associées (S′), supposons que l'on conserve les fonctions θ, θ_1, η, η_1, mais qu'on remplace la fonction $f(x)$ par une autre $f_1(x)$; à (S) et (S′) se substitueront d'autres surfaces (S_1) et (S'_1); les valeurs x et x_1 de l'abscisse x satisfaisant à l'équation

$$f(x) = f_1(x_1)$$

correspondent, sur (S) et (S_1), d'une part, et sur (S′) et (S'_1), d'autre part, à deux directrices égales dont *la seconde* (et ce point nous sera utile plus loin) *s'obtient en donnant à la première une certaine translation parallèle à l'axe des x*; en d'autres termes, les nouvelles surfaces (S_1) et (S'_1) ont des directrices (x) égales respectivement à celles des premières (S) et (S′), mais distribuées suivant une autre loi, c'est-à-dire appuyées sur d'autres profils (a) ([1]). Par conséquent :

En passant de la surface (S) *à ses associées* (S′), *les directrices prennent la même succession de formes quand on change les profils de la surface* (S).

Supposons au contraire que, la fonction $f(x)$ étant conservée, ce soient les fonctions θ, θ_1, γ, γ_1 qui soient remplacées par d'autres; on aura encore de nouvelles surfaces (S_1) et (S'_1).

Un profil quelconque (a) de la surface (S) a comme équations, en le transportant parallèlement au plan des yz,

$$\begin{aligned} y &= f(x)\,\theta_1(a), \\ z &= f(x)\,\theta\,(a), \end{aligned}$$

et, si r est l'ordonnée de ce profil dans son plan, on a

$$\frac{y}{\theta_1} = \frac{z}{\theta} = f(x) = \frac{r}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta^2}},$$

de sorte que le profil considéré a pour équation dans son plan

$$r = f(x)\sqrt{\theta_1^2 + \theta^2}.$$

La forme de cette équation montre, en raisonnant comme nous l'avons fait pour les directrices, que les profils des surfaces (S) et de même ceux des surfaces (S′) sont respectivement égaux aux profils des surfaces (S_1) et (S'_1), mais qu'ils sont distribués sui-

---

([1]) Ce fait résulte aussi du mode de génération indiqué par M. Goursat pour la surface (S).

vant une autre loi, c'est-à-dire appuyés sur d'autres directrices. Donc :

En passant de la surface (S) *à ses associées* (S′), *les profils prennent la même succession de formes quand on change les directrices de la surface* (S).

La surface (S) peut être une surface moulure de Monge ou une surface de translation à génératrices planes.

Dans le cas où (S) est une surface moulure de Monge, les surfaces (S′) sont aussi des surfaces moulures de Monge; on peut, en conservant le profil de (S), prendre des cercles comme directrices de cette surface qui est ainsi remplacée par une surface de révolution; les surfaces (S′) deviennent aussi des surfaces de révolution, et l'on a les théorèmes ci-après que j'ai énoncés en 1891 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques :*

Pour toutes les surfaces moulures de Monge ayant le même profil qui se déforment en restant des moulures de Monge, le profil passe par la même succession de formes que s'il était le méridien d'une surface de révolution d'axe perpendiculaire aux plans des directrices des moulures qui se déformât en restant de révolution.

Plus particulièrement :

Le méridien d'une surface de révolution qui se déforme en restant de révolution passe par la même succession de formes quand on remplace l'axe de la surface par un autre parallèle au premier (*et situé bien entendu dans le plan du méridien*).

Par exemple, dans ces conditions :

Le méridien d'une sphère passe par la même succession de formes que celui d'un tore.

Dans le cas où (S) est une surface de translation à génératrices planes, les surfaces (S′) sont aussi de translation et à génératrices planes ([1]); les profils et directrices de ces surfaces sont justement

([1]) Il est à remarquer que, pour les surfaces de translation (S) et (S′) obteleurs deux systèmes de génératrices planes et l'on a ce théorème :

Si une surface de translation à génératrices planes se déforme en gardant sa définition, les génératrices de l'un quelconque des deux systèmes passent par la même série de formes quand on change celles de l'autre système.

Il est facile de reconnaître que ce théorème s'applique à une surface de translation quelconque :

Si une surface de translation quelconque se déforme en restant surface de translation avec conservation des paramètres des deux systèmes de courbes génératrices, les génératrices de l'un quelconque de ces deux systèmes passent par la même série de formes quand on change celles de l'autre système.

En effet, les coordonnées de la surface donnée (S) et de la surface déformée (S') doivent être de la forme

$$x = f(u) + \varphi(v), \qquad x' = U + V,$$

u et v étant les paramètres des deux systèmes de courbes génératrices.

En égalant les ds^2 de ces deux surfaces, les coefficients des termes en $du\,dv$ conduisent à l'équation

$$\mathrm{S} f'(u)\varphi'(v) - \mathrm{S}\, U'V' = 0.$$

Or on sait qu'une telle équation ne peut être vérifiée que par des relations linéaires entre les fonctions U' et $f'(u)$, c'est-à-dire U et $f(u)$ d'une part, et entre les fonctions V' et $\varphi'(v)$, c'est-à-dire V et $\varphi(v)$ d'autre part; les fonctions U dépendent donc des fonctions $f(u)$ seules et les fonctions V des fonctions $\varphi(v)$ seules, ce qui était évident *a priori*.

Cela posé, si sur la surface (S) on change les génératrices (u) en conservant les génératrices (v), ce qui revient à remplacer les fonctions $\varphi(v)$ par d'autres, les fonctions V seront modifiées,

---

nues par M. Goursat, les plans des deux familles de génératrices sont rectangulaires. Ce fait devait nécessairement se produire en vertu d'un théorème que j'ai démontré récemment dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1895) : *Démonstration d'un théorème sur les surfaces de translation.*

mais non les fonctions U; par suite les génératrices (v) de la surface (S′) resteront bien les mêmes.

On peut remarquer que ce changement des génératrices (u) a pour effet de *donner aux génératrices* (v) *des translations variables en grandeur et en direction;* tandis que, pour les surfaces de M. Goursat, le changement des profils (a) *donne aux directrices* (x), ainsi qu'on l'a vu plus haut, *des translations variables en grandeur, mais de direction constante* (*l'axe des* x).

On peut se proposer de résoudre le problème suivant :

Soit une surface (S) venant coïncider, dans une certaine déformation, avec une série de surfaces (S′); une famille de courbes au paramètre v étant tracée sur (S), supposons qu'on change la distribution de ces courbes dans l'espace en conservant leur forme et leur grandeur, et qu'on fasse une opération analogue pour les courbes correspondantes tracées sur (S′); (S) et (S′) se transformeront en (S_1) et (S'_1) :

Déterminer la surface (S) *de manière que* (S′) *s'applique encore sur* (S'_1) *avec correspondance des courbes* (v).

On voit que la surface (S) de M. Goursat et la surface de translation quelconque répondent à cette question de deux manières différentes.

Les équations de ce problème sont faciles à poser. Les surfaces (S) et (S′) de coordonnées x, y, z; x', y', z' étant supposées rapportées aux courbes (v) et à une seconde famille de courbes (u), les coordonnées x_1, y_1, z_1; x'_1, y'_1, z'_1 de (S_1) et (S'_1) devront avoir des formes telles que

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 = a + \alpha x + \beta y + \gamma z, & x'_1 = a' + \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ y_1 = b + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, & y'_1 = b' + \alpha'_1 x' + \beta'_1 y' + \gamma'_1 z', \\ z_1 = c + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, & z'_1 = c' + \alpha'_2 x' + \beta'_2 y' + \gamma'_2 z', \end{cases}$$

où $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$, qui ont une signification évidente, sont des fonctions de v.

En exprimant que les surfaces (S_1) et (S'_1) s'appliquent l'une sur l'autre, les coefficients de du^2 sont égaux d'eux-mêmes parce que les surfaces (S) et (S′) sont applicables l'une sur l'autre; les coefficients de $du\,dv$ et de dv^2 fournissent deux équations;

celles-ci, jointes aux trois équations qui traduisent l'applicabilité de (S) sur (S′), donnent cinq équations entre les six fonctions x, y, z, x', y', z'. Mais, comme la famille de courbes (u) tracée sur (S) reste arbitraire, on peut, sans diminuer la généralité du problème, imposer une condition à cette famille, par exemple d'être orthogonale ou conjuguée à la famille (v); on introduit ainsi une sixième équation entre les six fonctions x, y, z, x', y', z'.

La surface (S) n'est donc pas arbitraire; sa détermination dépend d'ailleurs du nouveau mode de distribution adopté pour les courbes (v) tracées sur (S) et (S′), c'est-à-dire du choix des fonctions a, b, c, α, β, γ, ...

Imposons-nous, par exemple, la condition que cette distribution se fasse à l'aide de translations parallèles à une même droite que nous pourrons prendre pour axe des x; nous savons que les surfaces (S) et (S′) de M. Goursat répondent à ce cas quant à leurs directrices; il est facile de reconnaître que ce sont les seules; on doit en effet avoir

$$\begin{aligned} x_1 &= a + x, & x'_1 &= a' + x', \\ y_1 &= y, & y'_1 &= y', \\ z_1 &= z, & z'_1 &= z'. \end{aligned}$$

En égalant les ds^2 de ces deux surfaces, on obtient les deux équations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{da}{dv}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{da'}{dv}\frac{\partial x'}{\partial u}, \\ &\left(\frac{da}{dv}\right)^2 + 2\frac{da}{dv}\frac{\partial x}{\partial v} = \left(\frac{da'}{dv}\right)^2 + 2\frac{da'}{dv}\frac{\partial x'}{\partial v}; \end{aligned} \right.$$

la première, intégrée par rapport à u, donne

$$(5) \qquad x\frac{da}{dv} = x'\frac{da'}{dv} + \mathrm{V},$$

V désignant une fonction arbitraire de v.

L'équation (5), dérivée par rapport à v, conduit, en tenant compte de la seconde des équations (4), à

$$(6) \qquad 2x\frac{d^2a}{dv^2} - 2x'\frac{d^2a'}{dv^2} - \left(\frac{da}{dv}\right)^2 + \left(\frac{da'}{dv}\right)^2 - 2\mathrm{V}' = 0.$$

Les équations (5) et (6), qui ne contiennent que les deux coordonnées x et x', montrent que ces deux coordonnées dépendent de la seule variable v; il en résulte que, dans le cas que nous considérons, les courbes (v) tracées sur (S) et (S') sont dans des plans parallèles aux plans des yz, ou encore que ces surfaces sont justement celles qu'a obtenues M. Goursat.

Dans le cas général, exprimé par les équations (3), la nouvelle distribution des courbes (v) tracées sur (S) et (S') se fait au moyen de translations et de rotations à la fois. Les surfaces de M. Goursat donnent un exemple de ce cas par leurs profils.

Mais il est vraisemblable qu'elles ne sont pas les seules.