

# BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LINDELÖF

## Sur les équations homogènes

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 24 (1896), p. 35-39.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1896\\_\\_24\\_\\_35\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__35_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ÉQUATIONS HOMOGÈNES;

Par M. E. LINDELÖF.

Je considère l'équation linéaire

$$(1) \quad Xf = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + X_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} = 0,$$

où  $X_1, \dots, X_{n+1}$  sont des fonctions homogènes du même degré  $m$ . Cette équation admet  $n - 1$  intégrales distinctes qui sont homogènes du degré zéro. En effet, cette condition se traduit par la formule

$$(2) \quad Af = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} = 0.$$

Or on trouve

$$\Lambda(Xf) - X(Af) = (m - 1)Xf,$$

relation qui exprime que les équations (1) et (2) forment un système complet. Elles admettent par conséquent  $n - 1$  intégrales communes distinctes

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_{n+1}), \quad \varphi_2(x_1, \dots, x_{n+1}), \quad \dots, \quad \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n+1}),$$

qui sont précisément les intégrales homogènes du degré zéro de l'équation (1).

En écrivant que les équations (1) et (2) sont vérifiées pour  $f = \varphi_i$ , et en portant dans la première des identités ainsi obtenues

la valeur de  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{n+1}}$  fournie par la seconde, on trouve

$$\left( X_1 - \frac{x_1}{x_{n+1}} X_{n+1} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \dots + \left( X_n - \frac{x_n}{x_{n+1}} X_{n+1} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = 0$$

( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ).

Faisons ici la substitution

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = y, \quad \frac{x_2}{x_{n+1}} = y_2, \quad \dots, \quad \frac{x_n}{x_{n+1}} = y_n.$$

En posant

$$X_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}^m Y_i(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n + 1),$$

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_{n+1}) = \psi_k(y_1, \dots, y_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1),$$

et supprimant le facteur  $x_{n+1}^{m-1}$ , l'identité précédente deviendra

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (Y_1 - y_1 Y_{n+1}) \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} + \dots + (Y_n - y_n Y_{n+1}) \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n - 1). \end{array} \right.$$

Cela posé, j'établis entre  $y_1, \dots, y_n$  les  $n - 1$  relations suivantes

$$(4) \quad \psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = C_2, \quad \dots, \quad \psi_{n-1} = C_{n-1},$$

en désignant par  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  des constantes arbitraires. Il s'ensuit par différentiation

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n} dy_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1),$$

et en rapprochant ces formules aux formules (3), on en conclut que les variables  $y_1, \dots, y_n$ , liées par les relations (4), vérifient les équations différentielles

$$\frac{dy_1}{Y_1 - y_1 Y_{n+1}} = \frac{dy_2}{Y_2 - y_2 Y_{n+1}} = \dots = \frac{dy_n}{Y_n - y_n Y_{n+1}},$$

ou bien, en introduisant une variable auxiliaire  $t$ ,

$$(5) \quad \frac{dy_i}{dt} = Y_i - y_i Y_{n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les relations (4) nous donnent ainsi la solution générale du système (5), et nous pouvons par suite énoncer le théorème suivant :

L'intégration du système (5) revient à la recherche des intégrales homogènes du degré zéro de l'équation (1).

Ce résultat est la généralisation d'un théorème sur les équations différentielles à deux variables, énoncé par M. Darboux (1).

Comme application de ce qui précède, je considère le système des équations différentielles

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = (a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n + a_{i,n+1}) \\ \quad - y_i(a_{n+1,1}y_1 + \dots + a_{n+1,n}y_n + a_{n+1,n+1}) \\ \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

qui est analogue à l'équation de Jacobi. L'équation (1) devient dans ce cas

$$(7) \quad \begin{cases} (a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n+1}x_{n+1}) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots \\ \quad + (a_{n+1,1}x_1 + \dots + a_{n+1,n+1}x_{n+1}) \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} = 0, \end{cases}$$

en sorte qu'on est ramené à l'intégration d'un système linéaire à  $n + 1$  variables.

Considérons l'équation en  $\lambda$

$$(8) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

dont nous désignerons les racines par  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ . Dans le cas où ces racines sont distinctes, on pourra déterminer  $n + 1$  fonctions linéaires

$$u_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{i,n+1}x_{n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n + 1),$$

telles qu'en les choisissant pour nouvelles variables l'équation (7) prenne la forme

$$\lambda_1 u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda_2 u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \dots + \lambda_{n+1} u_{n+1} \frac{\partial f}{\partial u_{n+1}} = 0,$$

qui s'intègre immédiatement. Pour intégrales homogènes du de-

(1) *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré*, Bulletin des Sciences math. et astr., année 1878, p. 70.

gré zéro, on pourra choisir les suivantes

$$u_1^{\lambda_2-\lambda_3} u_2^{\lambda_3-\lambda_1} u_3^{\lambda_1-\lambda_2}, \quad u_2^{\lambda_3-\lambda_1} u_3^{\lambda_1-\lambda_2} u_4^{\lambda_2-\lambda_3}, \quad \dots, \quad u_{n-1}^{\lambda_n-\lambda_{n+1}} u_n^{\lambda_{n+1}-\lambda_{n-1}} u_{n+1}^{\lambda_{n-1}-\lambda_n},$$

et l'intégrale générale de l'équation proposée s'obtient, par suite, en égalant ces expressions à des constantes arbitraires, après y avoir rétabli les variables primitives à la place des  $u$ .

Plaçons-nous maintenant dans le cas où les racines de (8) ne sont pas distinctes. Pour fixer les idées, nous supposons  $n = 4$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \mu$ . Alors l'équation (7) pourra être réduite à la forme

$$\begin{aligned} \lambda u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + (\alpha u_1 + \lambda u_2) \frac{\partial f}{\partial u_2} + \mu u_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} \\ + (\beta u_3 + \mu u_4) \frac{\partial f}{\partial u_4} + (\gamma u_3 + \delta u_4 + \mu u_5) \frac{\partial f}{\partial u_5} = 0, \end{aligned}$$

les  $u$  désignant des fonctions linéaires et homogènes des  $x$ . Cette équation admet les intégrales suivantes

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \frac{u_2}{u_1} - \frac{\alpha}{\lambda} \log u_1, \quad \varphi_2 = \frac{u_4}{u_3}, \quad \varphi_3 = \frac{u_5}{u_3} - \frac{\beta}{\mu} \log u_3, \\ \varphi_4 = \frac{u_5}{u_3} - \frac{\gamma}{\mu} \log u_3 - \frac{\delta}{\mu} \frac{u_4}{u_3} \log u_3 + \frac{\beta \delta}{2 \mu^2} \log^2 u_3. \end{aligned}$$

D'autre part la condition

$$u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + u_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} + u_4 \frac{\partial f}{\partial u_4} + u_5 \frac{\partial f}{\partial u_5} = 0$$

devient, en considérant  $f$  comme fonction des  $\varphi$ ,

$$\frac{\alpha}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} + (\lambda - \mu) \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} + \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial f}{\partial \varphi_3} + \frac{\gamma + \delta \varphi_3}{\mu} \frac{\partial f}{\partial \varphi_4} = 0,$$

équation d'où l'on tire immédiatement les trois intégrales suivantes qui seront homogènes du degré zéro :

$$\begin{aligned} \psi_1 = \beta \varphi_1 - \alpha \varphi_3 + \frac{\alpha \beta}{\lambda \mu} \log \varphi_2 = \beta \frac{u_2}{u_1} - \alpha \frac{u_5}{u_3}, \\ \psi_2 = \frac{\lambda - \mu}{\alpha} \varphi_1 - \frac{1}{\lambda} \log \varphi_2 = \frac{\lambda - \mu}{\alpha} \frac{u_2}{u_1} + \log \frac{u_3}{u_1}, \\ \psi_3 = \beta \varphi_4 - \gamma \varphi_3 - \frac{\delta}{2} \varphi_3^2 = \beta \frac{u_5}{u_3} - \gamma \frac{u_4}{u_3} - \frac{\delta}{2} \left( \frac{u_4}{u_3} \right)^2. \end{aligned}$$

La solution générale du système proposé nous sera donc donnée par les équations

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = C_2, \quad \psi_3 = C_3,$$

où il faudra rétablir les variables primitives.

---