BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

Sur certaines équations différentielles d’ordre supérieur analogues à l’équation de Clairaut

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 71-72.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__71_1>

SUR CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR ANALOGUES A L'ÉQUATION DE CLAIRAUT;

Par M. L. Raffy.

Après avoir fait connaître (*Bull. de la Soc. mathém. de France,* t. XXIII, p. 57 et suiv.) une classe étendue d'équations du premier ordre qu'on intègre, à la façon des équations de Clairaut, en y remplaçant la dérivée par une constante arbitraire, j'ai remarqué (*ibid.,* p. 63) qu'une propriété analogue appartient à l'équation linéaire

$$\varphi \equiv y - xy' + \frac{x^2}{2!}y'' - \ldots + (-1)^m \frac{x^m}{m!}y^{(m)} = 0,$$

puisque son intégrale générale est

$$y - C_1 x + \frac{C_2}{2!}x^2 - \ldots + (-1)^m \frac{C_m}{m!}x^m = 0.$$

Je me propose actuellement de retrouver et d'étendre ce résultat. Considérons, à cet effet, l'expression différentielle φ et formons ses dérivées successives, en traitant $y, y', \ldots, y^{(m)}$ comme des constantes. Je dis d'abord que *l'équation différentielle*

$$(1) \quad y - xy' + \frac{x^2}{2!}y'' - \ldots + (-1)^m \frac{x^m}{m!}y^{(m)} = F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}\right)$$

où F *est une fonction arbitraire, a pour intégrale générale*

$$(2) \quad y + C_1 x - \frac{C_2}{2!}x^2 + \ldots - (-1)^m \frac{C_m}{m!}x^m = F(C_1, C_2, \ldots, C_m).$$

En différentiant l'équation (1), on trouve un résultat de la forme

$$y^{(m+1)}\Psi(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0,$$

ce qui est une analogie avec l'équation de Clairaut. D'après cela, posons

$$y = C_0 - C_1 x + \frac{C_2}{2!} x^2 - \ldots + (-1)^m \frac{C_m}{m!} x^m.$$

L'application répétée de la formule de Taylor à ce polynôme donne

$$\frac{\partial^r \varphi}{\partial x^r} = (-1)^r y^{(r)}(x - x) = (-1)^r y^{(r)}(0) = C_r$$
$$(r = 1, 2, \ldots, m).$$

Substituant ces expressions dans l'équation (1), on trouve

$$C_0 = F(C_1, C_2, \ldots, C_m),$$

ce qui démontre la proposition. Mais il y a plus. L'identité

$$y = \varphi(0) = \varphi(x - x) = \varphi(x) - x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{x^2}{2!}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \ldots + (-1)^m \frac{x^m}{m!}\frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}$$

donne visiblement

$$\varphi(x) = y + x\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{x^2}{2!}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \ldots - (-1)^m \frac{x^m}{m!}\frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}.$$

Si donc on écrit l'équation (1) sous la forme

$$\Phi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m x}{\partial x^m}\right) = F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}\right),$$

on voit, par comparaison avec la relation (2), qu'*on obtient son intégrale générale*

$$\Phi(C_1, C_2, \ldots, C_m) = F(C_1, C_2, \ldots, C_m)$$

en y remplaçant les dérivées successives de φ par des constantes arbitraires.

Ainsi se trouve généralisée la propriété des équations de Clairaut.