BULLETIN DE LA S. M. F.

LÉMERAY

Application des fonctions doublement périodiques à la solution d'un problème d'itération

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 282-285.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__282_1>

APPLICATION DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES A LA SOLUTION D'UN PROBLÈME D'ITÉRATION;

Par M. LÉMERAY.

1. Dans une Communication insérée au *Bulletin* (t. XXVI, 1898, p. 5), M. Leau a étudié le problème de Babbage :

Déterminer des fonctions $\varphi(z)$ *telles que l'on ait identiquement* $\varphi_n(z) = z$, *en posant*

$$\varphi_1(z) = \varphi(z), \qquad \ldots, \qquad \varphi_p(z) = \varphi_{p-1}[\varphi(z)].$$

M. Leau démontre, en particulier, que si l'on cherche des fonctions uniformes, les fonctions inconnues seront nécessairement des fractions rationnelles.

2. Je voudrais d'abord montrer que l'on peut trouver des fonctions algébriques irrationnelles répondant à la question; on obtient ainsi une solution peut-être nouvelle du problème proposé.

Soit la fonction elliptique $\operatorname{sn}(k, \theta)$, de périodes $4\Omega_1$ et $2\Omega_2$. Soit ζ un argument qui divise exactement une période, de telle sorte qu'on ait, par exemple, $n\zeta = 4\Omega_1$, n étant entier; on aura

$$\operatorname{sn}(k, \theta + n\zeta) = \operatorname{sn}(k, \theta)$$

quel que soit θ. θ étant variable et ζ constant, posons

$$\operatorname{sn}\zeta = a\ (^1), \qquad \operatorname{sn}\theta = z, \qquad \operatorname{sn}(\theta + \zeta) = \varphi(z).$$

(1) a sera, comme l'on sait, exprimable par radicaux.

D'après le théorème d'addition de sn, on aura

$$(1) \qquad \varphi(z) = \frac{a\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} + z\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)}}{1-k^2a^2z^2}.$$

Je dis que cette fonction $\varphi(z)$ satisfait à la question. En effet, $\varphi_2(z)$ étant obtenu en remplaçant, dans $\varphi(z)$, z par $\varphi(z)$, on aura

$$\varphi_2(z) = \operatorname{sn}(\theta + \zeta + \arg\operatorname{sn} a) = \operatorname{sn}(\theta + \zeta + \zeta) = \operatorname{sn}(\theta + 2\zeta)$$

et généralement

$$\varphi_p(z) = \operatorname{sn}[\theta + (p-1)\zeta + \arg\operatorname{sn} a] = \operatorname{sn}(\theta + p\zeta).$$

La $n^{\text{ième}}$ itérative sera donc

$$\varphi_n(z) = \operatorname{sn}(\theta + n\zeta) = \operatorname{sn}\theta = z.$$

3. La fonction $\varphi(z)$ a quatre points de ramification $z = \pm 1$, $z = \pm \frac{1}{k}$. Elle est uniforme sur une surface de Riemann, formée de deux feuillets raccordés par les deux lignes de passage suivantes :

une droite allant de $z = +1$ à $z = +\frac{1}{k}$,

une droite allant de $z = -1$ à $z = -\frac{1}{k}$.

Dans le calcul des itératives de $\varphi(z)$, on prendra toujours la même détermination du radical $\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)}$.

Le changement de détermination ne portera que sur le radical $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$, dans lequel se fait la substitution.

Mais les itératives

$$\varphi_0(z) = z, \qquad \varphi_1(z), \quad \ldots, \quad \varphi_n(z) = z$$

ne forment pas une suite continue; elles sont représentées sur le plan par n points isolés. Pour préciser la manière de les suivre sur la surface de Riemann, il suffira de prendre, parmi les deux déterminations du radical, celle pour laquelle $\varphi_p(z)$ est égal à $\operatorname{sn}(\theta + \mu\zeta)$, quand la variable réelle et continue μ passe par la valeur p.

4. Quand on considère uniquement les valeurs réelles de a et z, on peut employer une représentation géométrique des itératives dont nous nous sommes déjà servi [1], et l'on choisira la détermination convenable du radical par le moyen suivant, qu'il suffira d'énoncer. Posons

$$\varphi(z) = u$$

et construisons, en coordonnées rectangulaires z, u, la courbe représentée par l'équation (1) [2]. Soit M_1 un point de la courbe d'abscisse z; $u_1 = u$ est l'ordonnée de M_1.

A partir de M_1, construisons une ligne brisée $M_1 P_1 M_2 P_2 \ldots$, dont les côtés $M_p P_p$ sont parallèles à OZ et dont les côtés $P_p M_{p+1}$ sont parallèles à OU; les points M étant pris sur la courbe, les points P sur la bissectrice positive de l'angle des axes $u = z$. Les ordonnées des points M_1, M_2, ... représentent les itératives $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ ..., pourvu que l'on procède ainsi :

Soient M_p le point de la courbe dont l'ordonnée est égale à $\varphi_p(z)$, et P_p le point de la bissectrice positive situé sur la parallèle à OZ menée par M_p. Par P_p on a à mener une parallèle à OU. Cette droite coupe la courbe en deux points. Quand ces points sont distincts, ce qui est le cas général, on choisira *celui qui n'est pas symétrique de* M_p par rapport à la bissectrice positive. Son ordonnée sera égale à $\varphi_{p+1}(z)$.

5. Quand on fait dégénérer sn en sin, k devient nul; l'équation (1) représente alors une ellipse ayant les bissectrices pour axes. La relation

$$\varphi_n(z) = z$$

se traduit par la propriété suivante de cette courbe :

Si AA' est l'axe dirigé suivant la bissectrice positive, BB' l'axe dirigé suivant l'autre bissectrice, et si l'angle BAB' est égal à $\frac{\pi}{n}$, alors M_{2n+1} coïncide avec M_1, quel que soit M_1.

---

(1) *Association française*, Bordeaux, 1895; *Nouvelles Annales*, 3e série, t. XVI et XVII.

(2) Cette courbe admet pour axes de symétrie les deux bissectrices des angles des axes.

Plus généralement si $BAB' = \frac{k\pi}{n}$ (k et n premiers entre eux), ce qui permet d'étendre la propriété au cas où AA' est le petit axe de l'ellipse, l'énoncé subsiste si k est impair. Si k est pair, M_{n+1} coïncide avec M_1.

Il faut remarquer que, si l'un des points M tombe en A ou A', deux des points P se confondent au même point; mais les points M restent toujours distincts.

6. Au lieu de sn, considérons une fonction F admettant des périodes. Soient ω l'une d'elles et ζ une valeur telle que $n\zeta = \omega$; si l'on pose

$$F(\zeta) = a, \qquad F(\theta) = z$$

et si l'équation

$$\varphi[F(\zeta), F(\theta)] = F(\theta + \zeta)$$

représente le théorème d'addition de la fonction F, la fonction $\varphi(a, z)$ est une intégrale de l'équation fonctionnelle $\varphi_n(z) = z$.

La démonstration est la même qu'au n° 2.

7. On obtient des fractions rationnelles en prenant, par exemple, pour F les fonctions $\tan\theta$, $\operatorname{Th}\theta$, qui ont pour théorèmes d'addition

$$\varphi(a, z) = \frac{a + z}{1 \mp az}.$$