BULLETIN DE LA S. M. F.

F. DUMONT

Sur les surfaces cubiques ayant un axe de symétrie ternaire et sur les surfaces cubiques possédant des points à indicatrice du troisième ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 117-121.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__117_0>

SUR LES SURFACES CUBIQUES AYANT UN AXE DE SYMÉTRIE TERNAIRE ET SUR LES SURFACES CUBIQUES POSSÉDANT DES POINTS A INDICATRICE DU TROISIÈME ORDRE;

Par M. Dumont.

L'équation générale des surfaces du troisième ordre possédant un axe de symétrie ternaire est

$$(1)\quad \begin{cases} 6Axyz+B(x^3+y^3+z^3)+3C(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2) \\ \qquad +3D(x^2+y^2+z^2)+6E(xy+yz+zx)+3F(x+y+z)+G=0, \end{cases}$$

si cet axe est la droite bissectrice du trièdre $Oxyz$ et

$$(2)\quad hz^3+3kz^2+3lz+r+3m(x^2+y^2)z+px(3y^2-x^2)+3q(x^2+y^2=0,$$

ou bien

$$(2')\quad 3(mz+px+q)y^2+hz^3+3mx^2z-px^3+3kz^2+3qx^2+3lz+r=0,$$

si l'axe de symétrie est Oz et que Oy soit pris parallèle à l'une des directions asymptotiques des sections $z=\lambda$). Ces équations sont à six paramètres, mais peuvent être ramenées à cinq par un transport de l'origine ayant pour effet d'annuler G ou r.

Pour toute valeur z_1 de z, on a une section dont les asymptotes forment un triangle équilatéral dont le centre est sur Oz et pour les trois valeurs de z racines de l'équation

$$(3)\qquad hz^3+3kz^2+3lz+r+\frac{4}{p^2}(mz+q)^3=0,$$

les sections sont des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$ dont les côtés sont trois à trois dans trois plans formant un trièdre. Par exemple les côtés A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 étant supposés ceux qui sont parallèles à Oy, sont dans un plan $mz+px+q=0$ coupant Oz au point $z=-\frac{q}{m}$ par lequel passent aussi les plans

$$(B_1C_1,\ B_2C_2,\ B_3C_3)\quad \text{et}\quad (C_1A_1,\ C_2A_2,\ C_3A_3).$$

Les surfaces à axe de symétrie ternaire se présentent donc comme un cas particulier des surfaces possédant trois points en ligne droite tels que, pour chacun d'eux, le plan tangent coupe la surface suivant trois droites concourantes. Ici, ces trois points sont sur la droite de l'infini des plans perpendiculaires à Oz; en l'un d'eux concourent A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, en un second B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 et en un troisième C_1A_1, C_2A_2 et C_3A_3.

Un point en lequel la surface est coupée par son plan tangent suivant trois droites concourantes n'a plus une indicatrice du second ordre, mais du troisième.

Désignons un tel point par I_3. On voit qu'une transformation homographique change la surface à symétrie ternaire en une surface possédant trois points I_3, en ligne droite, à distance finie. Réciproquement :

Théorème. — *Toute surface cubique possédant trois points* I_3 *sur une droite d à distance finie, pour chacun desquels les trois droites du plan tangent sont réelles, peut être transformée homographiquement en une surface à axe de symétrie ternaire.*

Soient I_3, I'_3, I''_3 les trois points, a, b, c les droites du plan tangent en I_3, a', b', c' et a'', b'', c'' les droites analogues pour I'_3 et I''_3. Chacune des droites de l'un des groupes coupe une de celles des deux autres groupes. Supposons que a coupe a' et a'', que b coupe b' et b'' et que c coupe c' et c''.

On peut d'abord transformer homologiquement de façon que les trois triangles $(aa'a'')$, $(bb'b'')$, $(cc'c'')$ deviennent équilatéraux. Si, en effet, dans un plan P passant par d l'on décrit sur $I_3I'_3$ et sur $I'_3I''_3$ des segments capables de 60°, puis que l'on prenne le point d'intersection O des deux arcs pour centre d'homologie, que le plan d'homologie soit parallèle à la droite d et le paramètre de la transformation tel que la transformée de d soit la droite à l'infini du plan P, les droites concourant en I_3, en I'_3 et en I''_3 auront respectivement comme transformées des parallèles à OI_3, à OI'_3 et à OI''_3, c'est-à-dire des droites faisant entre elles des angles de 60°. Par suite, les transformés des triangles $(aa'a'')$, $(bb'b'')$, $(cc'c'')$ sont des triangles équilatéraux, dont les côtés sont parallèles trois à trois et situés dans les trois faces d'un angle trièdre. Les centres des trois triangles sont d'ailleurs sur une même droite et l'on peut maintenant projeter de façon que, les trois triangles restant équilatéraux, la droite des centres soit perpendiculaire aux plans des trois triangles.

Or, la surface obtenue ayant trois sections perpendiculaires à une même droite, qui possèdent la symétrie ternaire par rapport à cette droite, possède elle-même cette symétrie, comme on s'en assure aisément.

Théorème. — *Lorsqu'une surface cubique, sans point singulier, possède deux points* I_3, *elle en possède un troisième en ligne droite avec les deux autres.*

Soient I_3, I'_3 les deux points supposés, a, b, c et a', b', c' les groupes de droites de la surface situées dans les plans tangents en ces points. Chacune des droites a, b, c rencontre l'une des droites a', b', c'; supposons que a coupe a', que b coupe b' et que c coupe c' et soient a'', b'' et c'' les troisièmes droites de la surface dans les plans $(a a')$, $(b b')$ et $(c c')$. Elles doivent rencontrer $I_3 I'_3$ au même point, sinon la droite $I_3 I'_3$ aurait plus de trois points sur la surface et y serait tout entière. Mais alors les points I_3, I'_3 par chacun desquels passeraient trois droites de la surface non dans un même plan, seraient des points singuliers, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soit I''_3 le point où a'', b'' et c'' coupent $I_3 I'_3$.

Ces trois droites sont, de plus, dans un même plan, puisque le point I''_3 est supposé non singulier.

Une surface cubique peut posséder un quatrième point I_3. Elle peut même en posséder six répartis sur deux droites ne se coupant pas. Pour le voir, il suffit de remarquer que si l'on fait $m = q = 0$ dans l'équation $(2')$, les trois sections réduites à trois droites sont formées de droites concourantes.

On peut aussi remarquer que, si l'on prend les deux droites contenant les points I_3 (et supposées à distance finie) pour arêtes $x = y = 0$ et $z = t = 0$ du tétraèdre de référence et quatre des points I_3 pour sommets de ce tétraèdre, l'équation de la surface peut prendre la forme

$$xy(y - mx) + s . zt(t - pz) = 0. \tag{4}$$

Théorème. — *Une surface cubique possédant six points* I_3 *répartis sur deux droites* k, l *et tels que, pour chacun d'eux, les trois droites de la surface soient réelles, ne peut posséder un septième point* I_3 *satisfaisant à la même condition.*

Soient I_3, I'_3, I''_3 les points de k, J_3, J'_3, J''_3 ceux de l. Prenons I_3, I'_3, J_3 et J'_3 pour sommets $x=y=z=0$, $x=y=t=0$, $z=t=x=0$ et $z=t=y=0$ du tétraèdre de référence.

Si un septième point I_3, que nous appellerons i_3, existait, des trois droites d, d', d'' qui y convergeraient, chacune rencontrerait une droite de chacun des groupes concourant en I_3, en I'_3 et en I''_3.

Supposons que d coupe

$$I_3J_3,\quad I'_3J''_3\quad I''_3J''_3,$$

que d' coupe

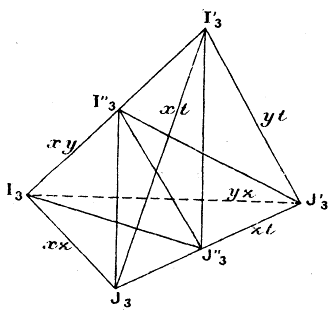
$$I_3J'_3,\quad I'_3J''_3\quad I''_3J_3,$$

et que d'' coupe

$$I_3J''_3,\quad I'_3J_3\quad I''_3J'_3,$$

d, d' et d'' sont sur les hyperboloïdes H, H' et H'' définis respectivement par les trois ternes de droites correspondantes (*fig.* 1).

Fig. 1.



Ces trois hyperboloïdes ont en commun les droites k et l, puisqu'ils contiennent chacun trois points de chacune de ces droites. Mais ils contiennent aussi le point i_3 et par suite la sécante à k et à l passant par i_3, donc enfin un quadrilatère gauche, de sorte que ces trois quadriques font partie d'un même faisceau ayant pour base un quadrilatère gauche.

Les trois hyperboloïdes ont pour équations

$$\text{(H)} \qquad pyz - mxt = 0,$$

$$\text{(H}'') \qquad -pyz + pmzx + yt = 0,$$

$$\text{(H}') \qquad mpzx - mxt + yt = 0.$$

Or, la droite $y = \mu x$, $z = \frac{m}{p\mu} t$ du premier est sur le second si l'on a $\mu^2 - m\mu + m^2 = 0$ et sur le troisième à la même condition. Cette équation n'a pas de racines réelles en μ, par suite les deux côtés du quadrilatère autres que k et l sont imaginaires et le point i n'est pas un point réel.