E. PICARD

Sur un exemple d'approximations successives divergentes

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 137-143.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__137_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UN EXEMPLE D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES DIVERGENTES;

Par M. Émile Picard.

J'ai signalé autrefois un exemple curieux d'approximations successives divergentes fourni par l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathrm{F}(u, x, y),$$

où $\mathrm{F}(u, x, y)$ est une fonction positive et croissante de u, quand (x, y) est dans une certaine région du plan. Étant tracée dans cette région une courbe fermée C, il existe une intégrale continue et une seule satisfaisant à l'équation précédente et s'annulant sur C. Si l'on cherche à obtenir cette intégrale, en procédant par approximations successives et formant les équations

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 &= \mathrm{F}(0, x, y),\\
\Delta u_2 &= \mathrm{F}(u_1, x, y),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Delta u_n &= \mathrm{F}(u_{n-1}, x, y),
\end{aligned}$$

tous les u s'annulant sur C, on reconnaît que les u à indices impairs forment une suite croissante tendant vers une limite, et que les u à indices pairs forment une suite décroissante tendant vers une autre limite qui peut être différente de la première. Si l'on admet *que* u_{2n+1} *et* u_{2n} *convergent* UNIFORMÉMENT *vers leurs limites* u *et* v, il est presque immédiat que l'on a

$$\Delta u = \mathrm{F}(v, x, y), \qquad \Delta v = \mathrm{F}(u, x, y).$$

Est-il possible d'établir que les u d'indices impairs, et les u d'indices pairs convergent *uniformément* vers leurs limites? J'ai examiné sommairement ce point, pour le cas analogue au précédent d'une équation à une seule variable, dans une Note des *Comptes rendus* (14 février 1898); c'est cette Note que je vais d'abord développer, et j'indiquerai ensuite les remarques faites cet été dans mon Cours pour le cas d'une équation à deux variables.

1. Considérons donc d'abord l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y, x),$$

où f est une fonction positive et croissante de y, quand x varie entre a et b $(a < b)$. Prenons d'abord l'équation très simple

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x),$$

où $f(x)$ désigne une fonction continue de x et de signe constant dans l'intervalle (a, b) et formons l'intégrale y de cette équation s'annulant pour $x = a$ et $x = b$. Au lieu de lui donner la forme élémentaire classique, écrivons-la avec M. Burkhardt (*Bulletin de la Société mathématique*, 1894) sous la forme

$$y(x) = -\int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

où la fonction G, sorte de fonction de Green relative à l'intervalle (a, b), est définie par les égalités

$$G(x, \xi) = \frac{(b-x)(\xi-a)}{b-a} \qquad \text{pour} \qquad \xi < x,$$

$$G(x, \xi) = \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a} \qquad \text{pour} \qquad \xi > x.$$

Il est facile de voir que si α désigne un nombre positif fixe entre a et b, on peut trouver un nombre positif μ dépendant uniquement de a, b et α [non de $f(x)$ et de x], tel que l'on ait

$$G(x, \xi) < \mu G(\alpha, \xi).$$

Pour l'établir, il suffit d'examiner successivement les diverses dispositions de α, x et ξ dans l'intervalle (a, b). Ainsi, soit

$$\alpha < x < \xi,$$

on aura

$$G(x, \xi) = \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a},$$

$$G(\alpha, \xi) = \frac{(b-\xi)(\alpha-a)}{b-a}.$$

L'inégalité précédente devient

$$x - a < \mu(\alpha - a).$$

Elle sera vérifiée si μ est supérieur à $\frac{b-a}{\alpha-a}$. Avec toute autre disposition de α, x et ξ, on trouve de même un nombre μ convenable; le plus grand de ces différents nombres convient à notre objet; il dépend seulement de a, b, α.

Ceci posé, si l'on revient à la fonction $y(x)$, on aura évidemment

$$|y(x)| < \mu|y(\alpha)|.$$

2. Formons maintenant les diverses équations

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = f(0, x),$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = f(y_1, x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^2y_n}{dx^2} = f(y_{n-1}, x).$$

Pour une valeur, quelconque d'ailleurs, donnée à x

$$y_1(x),\quad y_3(x),\quad \dots,\quad y_{2n+1}(x),\quad \dots,$$

tendent vers une limite par valeurs croissantes; d'autre part

$$y_2(x),\quad y_4(x),\quad \dots,\quad y_{2n}(x),\quad \dots,$$

tendent vers une limite par valeurs décroissantes. On a

$$\frac{d^2(y_n - y_{n-2})}{dx^2} = f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-3}),$$

et par conséquent, d'après la remarque précédente,

$$|y_n(x) - y_{n-2}(x)| < \mu|y_n(\alpha) - y_{n-2}(\alpha)|.$$

Ceci montre clairement que, pour une même parité de n, *la fonction $y_n(x)$ tend uniformément dans l'intervalle* (a, b) *vers sa limite,* puisque la série de terme général

$$y_n(x) - y_{n-2}(x)$$

converge comme la série de terme général

$$y_n(\alpha) - y_{n-2}(\alpha).$$

3. Il est donc bien établi que les approximations successives nous conduisent à *deux* fonctions u et v satisfaisant aux deux équations

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(v, x), \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = f(u, x),$$

u et v s'annulant pour $x = a$ et $x = b$.

Nous savons, d'autre part, qu'il existe une intégrale et une seule y de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y, x),$$

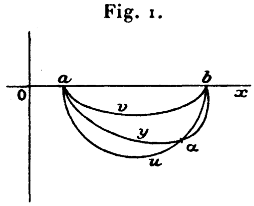
s'annulant pour $x = a$ et $x = b$; c'est ce qui résulte de mes recherches antérieures. Je veux ajouter une remarque relative à la *position* de y. Je dis que l'on a (pour toute valeur de x entre a et b)

$$u < y < v,$$

ou, en d'autres termes, *que l'intégrale y est intermédiaire entre u et v.*

Pour le démontrer, il suffit d'examiner les différentes circonstances qui pourraient se présenter s'il en était autrement. Supposons, par exemple, que l'on ait la disposition de la *fig.* 1,

Fig. 1.



où y rencontre u en un point α. Entre α et b, on a

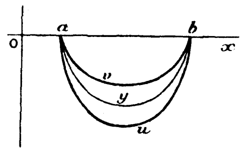
$$v > u > y \qquad (y, u \text{ et } v \text{ sont négatifs}).$$

Or on a

$$\frac{d^2(y - u)}{dx^2} = f(y, x) - f(v, x).$$

Le second membre est négatif dans (α, b). Donc $y - u$ qui s'annule en α et b devra être positif d'après cette équation ; nous arrivons ainsi à une contradiction. On verra tout aussi aisément que l'on arrive dans tous les cas à une absurdité, sauf si l'on a la *fig.* 2, où y est constamment entre u et v.

Fig. 2.



4. C'est dans le cas particulier de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^y,$$

que j'ai montré [1] que les deux limites u et v étaient distinctes quand l'intervalle (a, b) est assez grand. On peut évidemment donner une autre forme à ce résultat. Laissons l'intervalle (a, b) fixe, et envisageons l'équation avec le paramètre positif k

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k e^y.$$

Si l'on fait croître k à partir de zéro, on a d'abord

$$u = y = v.$$

A partir d'une certaine valeur k_0 de k, u cesse d'être égale à v, et y est intermédiaire entre ces deux fonctions. Il y a là quelque chose d'assez curieux. La fonction y, pour une valeur fixe et arbitraire d'ailleurs de x entre a et b, est manifestement une fonction analytique de k pour toute valeur positive de k. Tant que u et v coïncident, elles sont identiques à y et sont par suite des fonctions analytiques de k, mais, au delà de k_0, on peut se demander quelle sera la nature de u et de v regardées comme fonction de k; elles ne seront certainement pas le prolongement analytique de la fonction y, car alors elles coïncideraient. Elles peuvent représenter, au delà de k_0, des fonctions analytiques de k, qui ne seraient pas susceptibles de se prolonger analytiquement en deçà

---

[1] *Comptes rendus* (1894) et *Traité d'Analyse,* t. III, p. 147.

de k_0, ou bien encore elles pourraient être des fonctions non analytiques de k. *Cette étude présenterait peut-être quelque intérêt* (¹).

5. Il faut examiner maintenant le cas de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u = f(u, x, y),$$

pour établir la convergence *uniforme* des u d'indices pairs et des u d'indices impairs vers leurs limites respectives. Je ne traiterai pas le cas général, et je vais supposer que f, regardée comme fonction de x et y, soit seulement fonction de $\sqrt{x^2+y^2}$, le contour C étant supposé une circonférence ayant son centre à l'origine.

Commençons par étudier l'équation

$$\Delta u = f(x, y),$$

f ne dépendant que de $\sqrt{x^2+y^2}$ et ayant un signe constant (soit le signe *plus*) dans C. L'intégrale u de l'équation précédente s'annulant sur C est donnée par la formule

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int\int G(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

G étant la fonction de Green relative à C et au point (x, y); u est négative et ne dépend que de $r = \sqrt{x^2+y^2}$, d'après l'hypothèse faite sur f. Je dis que la plus grande valeur absolue de u correspond à $x = y = 0$. En effet, si le minimum de u n'avait pas lieu pour $x = y = 0$, il y aurait certainement, u ne dépendant que de r, des valeurs de (x, y) dans C pour lesquelles u passerait par un maximum. Or ceci est impossible, car, pour une telle valeur, on aurait

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leqq 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leqq 0,$$

ce qui est incompatible avec

$$\Delta u = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ est toujours positif.

(¹) On trouvera encore posées d'autres questions concernant les approximations successives à la fin de ma Note des *Comptes rendus* (14 février 1898).

Si maintenant nous revenons aux approximations successives, il est clair que

$$| u_n - u_{n-2} |$$

sera maximum pour $x = y = 0$. La convergence *uniforme* dans le cercle C de $u_n(x, y)$ vers sa limite, pour une même parité de n, en résulte immédiatement, puisque la série donnant la limite cherchée se compare immédiatement à la même série pour $x = y = 0$; cette valeur particulière joue ici le même rôle, et dans des circonstances plus simples, que jouait tout à l'heure $x = \alpha$.

Il resterait à examiner le cas où $f(u, x, y)$ ne dépend pas seulement de $\sqrt{x^2 + y^2}$. Il n'est pas douteux que, dans ce cas aussi, on a les convergences *uniformes* vers les deux limites, mais la démonstration rigoureuse semble devoir entraîner à quelques longueurs et se présenter moins élégamment que les précédentes; je ne m'y arrêterai pas.