BULLETIN DE LA S. M. F.

F. CASPARY

Sur le centre de gravité d’un quadrilatère

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 143-146.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__143_1>

SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ D'UN QUADRILATÈRE;

Par M. F. Caspary.

1. M. Mannheim vient d'énoncer (*Bull. de la Soc. Math.*, t. XXVII, p. 148) le beau théorème suivant, relatif au centre de gravité d'un trapèze : AB, CD *sont les côtés parallèles d'un trapèze; par les extrémités* C, D *du plus petit de ces côtés, on mène des parallèles aux diagonales du trapèze; ces droites et le côté* AB *prolongé forment un triangle dont le centre de gravité coïncide avec celui du trapèze.*

D'après ce théorème, le centre de gravité du trapèze coïncide avec le centre de gravité du triangle PRS, P étant le point d'intersection des parallèles aux diagonales AC et BD du trapèze ABCD, et R, S les points où le côté AB prolongé coupe les droites PD, PC.

2. Je fais remarquer que le centre de gravité du trapèze ABCD coïncide aussi avec le centre de gravité du triangle PAB et que le même théorème subsiste encore pour un quadrilatère quelconque.

On peut démontrer très aisément ce théorème et quelques autres analogues, à l'aide des notions et formules de mon Mémoire : *Ap-*

plications des méthodes de Grassmann. Centre de gravité d'un quadrilatère et d'un pentagone (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. XVII, 1898, p. 389).

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les quatre sommets d'un quadrilatère quelconque, O le point d'intersection des deux diagonales A_1A_3 et A_2A_4; M_{12}, M_{23}, ... les milieux des côtés A_1A_2, A_2A_3, ...; M_{13}, M_{24} les milieux des diagonales A_1A_3, A_2A_4. Si l'on mène par les sommets opposés A_1 et A_3 deux parallèles à la diagonale A_2A_4 et par les deux autres sommets opposés A_2 et A_4 deux autres parallèles à la diagonale A_1A_3, on obtient un parallélogramme dont M'_{12}, M'_{23}, M'_{34}, M'_{41} sont les sommets et où le point M'_{12} est le point d'intersection des parallèles menées par A_3 et A_4, ... (*voir* p. 396 et 397). De même on obtient les points M'_{24} et M'_{13}, si l'on construit sur la diagonale A_1A_3 le point M'_{24} et sur la diagonale A_2A_4 le point M'_{13}, de telle façon que $A_1O = M'_{24}A_3$ et $A_4O = M'_{13}A_2$. Ces six points M'_{lm} se construisent aussi immédiatement par les relations $OM_{ik} = M_{ik}M'_{lm}$, où les quatre indices i, k, l, m désignent, dans un ordre quelconque, les quatre indices 1, 2, 3, 4.

Au moyen des formules (2), (7) et (8) de mon Mémoire précité (p. 393 et 396), le centre de gravité G du quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ et les points M'_{lm} s'expriment ainsi :

$$3G = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - O, \tag{1}$$

$$M'_{lm} = A_i + A_k - O \quad \begin{pmatrix} i, k, l, m = 1, 2, 3, 4 \\ i \neq k \neq l \neq m \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Par conséquent, on a

$$3G = A_l + A_m + M'_{lm}, \tag{3}$$

$$3G = M'_{ik} + M'_{lm} + O. \tag{4}$$

On a dès lors le théorème suivant :

I. *Les* 12 *triangles* $A_lA_mM'_{lm}$ *et* $M'_{ik}M'_{lm}O$ $(i, k, l, m = 1, 2, 3, 4;$ $i \neq k \neq l \neq m)$ *ont le même centre de gravité; celui-ci coïncide avec le centre de gravité du quadrilatère* $A_1A_2A_3A_4$ (1).

---

(1) Comme le centre de gravité des 6 triangles $A_lA_mM'_{lm}$ est situé sur les segments $M_{lm}M'_{lm}$, la première partie du théorème précédent n'est qu'un énoncé modifié des théorèmes V et VI de mon Mémoire précité.

3. La formule (1) donne naissance encore à d'autres constructions du centre de gravité d'un quadrilatère.

Si l'on mène, par les points M'_{12} et M'_{34}, des parallèles aux côtés A_1A_2 et A_3A_4, de façon que $M'_{12}K_1 = A_1A_2 = K_2M'_{12}$ et $M'_{34}K_3 = A_3A_4 = K_4M'_{34}$, on a

$$\begin{cases} K_1 - M'_{12} = A_2 - A_1 = M'_{12} - K_2, \\ K_3 - M'_{34} = A_4 - A_3 = M'_{34} - K_4, \end{cases}$$

ou

$$(5) \qquad \begin{cases} K_1 = M'_{12} + A_2 - A_1 = -A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - O, \\ K_2 = M'_{12} - A_2 + A_1 = A_1 - A_2 + A_3 + A_4 - O, \\ K_3 = M'_{34} + A_4 - A_3 = A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - O, \\ K_4 = M'_{34} - A_4 + A_3 = A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - O; \end{cases}$$

donc

$$(6) \qquad K_i + 2A_i = K_k + 2A_k = 3G \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

ou

$$(7) \qquad K_i - K_k = 2(A_k - A_i).$$

II. *Si l'on mène par les points* M'_{12}, M'_{23}, M'_{34}, M'_{41} *des parallèles aux côtés* A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1, *on obtient le quadrilatère* $K_1K_2K_3K_4$. *Les points* M'_{12}, ..., M'_{41} *sont les milieux des côtés* K_1K_2, ..., K_4K_1 *et les points* M'_{13} *et* M'_{24} *les milieux des diagonales* K_1K_3 *et* K_2K_4. *Les quatre segments* A_1K_1, A_2K_2, A_3K_3, A_4K_4 *concourent au centre de gravité* G *du quadrilatère* $A_1A_2A_3A_4$ *et le point* G *est situé sur chaque segment de façon que* $A_iG = \frac{1}{2}GK_i$.

4. Les points K_i sont liés très simplement aux points G_i, centres de gravité des triangles $A_kA_lA_m$. Comme les points G_i s'expriment par les formules

$$(8) \qquad 3G_i = A_k + A_l + A_m,$$

les relations (5) prennent la forme

$$(9) \qquad K_i = 3G_i - 2Q_i,$$

où

$$(10) \qquad 2Q_i = A_i + O;$$

donc

III. *Si l'on désigne par* G_i *les centres de gravité des* *triangles* $A_k A_l A_m$; *par* Q_i *les milieux des segments* $A_i O$, *les points* K_i *sont situés sur les droites* $G_i Q_i$ *de façon que* $Q_i G_i = \frac{1}{2} G_i K_i$.

5. Les centres de gravité G_i suffisent pour construire le centre de gravité G.

D'après les formules (1) et (3) de mon Mémoire précité (p. 392 et 393), le point d'intersection O des diagonales $A_1 A_3$ et $A_2 A_4$ est représenté par les formules

$$\delta O = \delta_1 A_1 + \delta_3 A_3 = \delta_2 A_2 + \delta_4 A_4,$$

où $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4 = \delta$ et δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 désignent les aires des triangles $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_4 A_1$, $A_4 A_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3$. Par conséquent, on obtient aisément

$$(11) \qquad \begin{cases} \delta_1 G_1 + \delta_3 G_3 = \delta G, \\ \delta_2 G_2 + \delta_4 G_4 = \delta G, \end{cases}$$

et de plus

$$(12) \qquad \begin{cases} 3(G_3 - G_1) = A_1 - A_3, \\ 3(G_4 - G_2) = A_2 - A_4, \\ 3(G - G_i) = A_i - O. \end{cases}$$

Donc

IV. *Les segments* $G_1 G_3$, $G_2 G_4$ *dont le point d'intersection* G *est le centre de gravité du quadrilatère* $A_1 A_2 A_3 A_4$ *sont parallèles aux segments* $A_3 A_1$, $A_4 A_2$ *et égaux à* $\frac{1}{3} A_3 A_1$, $\frac{1}{3} A_4 A_2$; *les segments* $G_i G$ *sont parallèles aux segments* OA_i *et égaux à* $\frac{1}{3} OA_i$.