

BULLETIN DE LA S. M. F.

R. D'ADHÉMAR

Sur une intégration par approximations successives

Bulletin de la S. M. F., tome 29 (1901), p. 190-199.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__190_1

© Bulletin de la S. M. F., 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE INTÉGRATION PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES;

Par M. Robert D'ADHÉMAR.

Je me propose de trouver l'intégrale de l'équation

$$(1) \quad \Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = h(x, y, z)u + f(x, y, z),$$

intégrale prenant, ainsi que l'une de ses dérivées, des valeurs données sur une surface donnée.

La méthode suivie permettra d'ailleurs d'intégrer des équations analogues, un peu plus difficiles à étudier.

1. Je dois, tout d'abord, rappeler brièvement ce que j'ai dit dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1) sur l'équation

$$(2) \quad \Delta(u) = F(x, y, z).$$

Soit S une surface à un seul bord. J'appelle *conormale* en un point la droite symétrique de la normale par rapport au plan horizontal passant par ce point. Une dérivée prise suivant cette direction sera dite *dérivée conormale*, et représentée par le symbole $\frac{d}{dN}$.

Cela étant, l'on donne sur S les valeurs de u et $\frac{du}{dN}$. L'on obtient alors la valeur de l'intégrale en un point (x_0, y_0, z_0) , si par ce point l'on peut mener un cône à axe vertical et dont les génératrices soient inclinées à 45° sur le plan horizontal, cône qui découpe dans S une aire à un seul bord et cela sans ambiguïté (2).

(1) Le 11 février 1901.

(2) Sur les *données* et la surface qui les porte, voir la fin de cette Note.

L'expression de $u(x_0, y_0, z_0)$ est la suivante :

$$(3) \quad u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_0} \left[\iint \int_{(W)} FV \, d\tau + \int \int_{(S)} \left(u \frac{dV}{dN} - V \frac{du}{dN} \right) d\omega \right],$$

(S) étant l'aire découpée dans S par le cône Λ^0 de sommet (x_0, y_0, z_0) ; (W) étant le volume intérieur à ce cône et limité par (S); enfin V étant la fonction auxiliaire suivante :

$$V = \log \left(\frac{z'}{r} + \sqrt{\frac{z'^2}{r^2} - 1} \right)$$

[l'on a posé $z' = z - z_0$, $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$].

Mais, sous cette forme (3), l'on ne peut *vérifier* que l'intégrale et sa dérivée conormale prennent bien les valeurs données lorsque le point (x_0, y_0, z_0) vient sur S. Or ceci est extrêmement important et j'aurai à y revenir.

De même, avec la forme (3) on ne peut songer à des *approximations successives*.

Pour cette double raison, je vais rechercher une forme explicite pour l'intégrale (3) de l'équation (2).

2. Prenons donc l'équation (2) avec la condition que, sur S, u et $\frac{du}{dN}$ sont *nuls*. (Nous verrons pourquoi l'on peut faire cette hypothèse.) Il vient alors

$$(4) \quad 2\pi u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial J_A}{\partial z_0},$$

si l'on convient d'écrire

$$J_A = \iiint_{(\Lambda^0)} F(x, y, z) V_A \, d\tau.$$

J'affecte la lettre V de l'indice A pour bien montrer que la fonction auxiliaire V varie avec le point A, (x_0, y_0, z_0) (*fig. 1*).

Nous devons évaluer la dérivée $\frac{\partial J_A}{\partial z_0}$.

Donnons pour cela à z_0 un accroissement infiniment petit dz_0 . A vient en A' et l'on a

$$J_{A'} = \iiint_{(\Lambda^{0'})} F(x, y, z) V_{A'} \, d\tau.$$

La dérivée cherchée est

$$\frac{J_{A'} - J_A}{dz_0}.$$

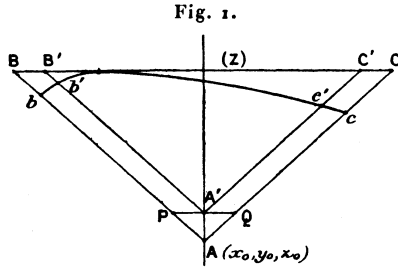
Évaluons

$$J_{A'} - J_A = -H.$$

On a évidemment

$$J_A = \iint \int_{(A'b'c')} FV_A d\tau + \iint \int_{(AA'bb'cc')} FV_A d\tau.$$

Considérons d'abord la deuxième intégrale V_A ayant un *signe*



constant, l'on peut faire sortir F de l'élément différentiel (théorème de la moyenne); nous avons donc à calculer

$$\iint \int V_A d\tau,$$

le volume d'intégration étant le volume compris entre les deux cônes.

Comme, d'ailleurs, on a

$$V_A > 0,$$

nous augmenterons l'intégrale en augmentant le volume, c'est-à-dire en remplaçant S par le *plan horizontal le plus élevé* qui ait un point commun avec S (il peut être tangent à S , il peut ne l'être pas).

Application systématique du *théorème de la moyenne*, emploi de ce plan horizontal *majorant*, voilà d'ailleurs la *marque constamment suivie* dans ces recherches.

Calculons donc

$$\iint \int_{(AA'BB'CC')} V_A d\tau.$$

Le volume se décompose naturellement en deux parties : APQ et BB'PA'QCC', mais la fonction V_A jouit d'une propriété remarquable. Pour tout *volume conique régulier* l'on a

$$\iiint V_A d\tau = \iiint d\tau.$$

Donc notre intégrale relative au volume APQ est égale à $\frac{\pi}{3} \overline{AA'}^3$ et, comme $\overline{AA'} = dz_0$, elle est du *troisième ordre*.

Évaluons l'intégrale relative à BB'PA'QCC'. Soit

$$\int_{z_0+dz_0}^z dz \int_0^{2\pi} d\hat{\alpha} \int_{z-z_0-dz_0}^{z-z_0} \log \left[\frac{z-z_0}{r} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^2 - 1} \right] r dr$$

(Z est la cote du plan majorant).

Or

$$\begin{aligned} & \int \log \left[\frac{z-z_0}{r} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^2 - 1} \right] r dr \\ &= \left\{ \frac{r^2}{2} \log \left[\frac{z-z_0}{r} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{r}\right)^2 - 1} \right] \right\} - \frac{z-z_0}{2} \left\{ \sqrt{(z-z_0)^2 - r^2} \right\}. \end{aligned}$$

Ici, en prenant pour r les limites voulues : $z-z_0$ et $z-z_0-dz_0$, l'on a

$$\begin{cases} - \frac{(z-z_0-dz_0)^2}{2} \log \left[\frac{z-z_0}{z-z_0-dz_0} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{z-z_0-dz_0}\right)^2 - 1} \right] \\ + \frac{z-z_0}{2} \sqrt{2(z-z_0) dz_0 - dz_0^2}. \end{cases}$$

L'intégrale relative à l'angle polaire $\hat{\alpha}$ donne 2π (constante sans importance). Il reste à intégrer cette dernière expression par rapport à z .

Intégrons, par parties, le premier terme. L'on obtient

$$\begin{aligned} & \left\{ - \frac{1}{6} (z-z_0-dz_0)^3 \log \left[\frac{z-z_0}{z-z_0-dz_0} + \sqrt{\left(\frac{z-z_0}{z-z_0-dz_0}\right)^2 - 1} \right] \right\}_{z_0+dz_0}^z \\ & + \int_{z_0+dz_0}^z \frac{(z-z_0-dz_0)^3}{6} \frac{-dz_0}{(z-z_0-dz_0) \sqrt{2(z-z_0) dz_0 - dz_0^2}} dz, \end{aligned}$$

il faut ajouter l'intégrale du deuxième terme

$$+ \int_{z_0+dz_0}^Z \frac{z-z_0}{2} \sqrt{2(z-z_0) dz_0 - dz_0^2} dz.$$

Laissons le terme tout intégré et réunissons les deux intégrales précédentes; cela donne, pour élément différentiel,

$$\frac{1}{6\sqrt{2(z-z_0) dz_0 - dz_0^2}} \{ 3(z-z_0) [2(z-z_0) dz_0 - dz_0^2] - (z-z_0-dz_0)^2 dz_0 \}.$$

Les termes en dz_0^2 et dz_0^3 dans le crochet donnent naissance à des termes en $dz_0^{\frac{3}{2}}$ et $dz_0^{\frac{5}{2}}$ qui ne jouent aucun rôle, et il reste à considérer

$$\int_{z_0+dz_0}^Z \frac{5}{6} \frac{(z-z_0)^2 dz_0}{\sqrt{2(z-z_0) dz_0 - dz_0^2}} dz = \frac{5}{\sqrt{2} \cdot 6} \sqrt{dz_0} \int_{z_0+dz_0}^Z \frac{(z-z_0)^2 dz}{\sqrt{z-z_0 - \frac{dz_0}{2}}}.$$

Ici encore nous n'avons à conserver que

$$\frac{5}{6\sqrt{2}} \sqrt{dz_0}^{\frac{2}{5}} (Z-z_0)^{\frac{5}{2}},$$

le reste étant d'ordre $\frac{3}{2}$ au moins en dz_0 .

Nous obtenons en somme

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{6} (Z-z_0-dz_0)^3 \log \left[\frac{Z-z_0}{Z-z_0-dz_0} + \sqrt{\left(\frac{Z-z_0}{Z-z_0-dz_0} \right)^2 - 1} \right], \\ + \frac{\sqrt{2}}{6} (Z-z_0)^{\frac{5}{2}} \sqrt{dz_0} + \lambda dz_0^{\frac{3}{2}} + \dots \end{array} \right.$$

Les deux premiers termes tendent vers zéro lorsque dz_0 tend vers zéro. Écrivons-les

$$M\sqrt{dz_0} - N.$$

La règle de l'Hospital montre que

$$\lim_{dz_0=0} \left(\frac{M\sqrt{dz_0}}{N} \right) = \sqrt{1 - \frac{dz_0}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{dz_0}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \frac{dz_0^2}{4} - \dots;$$

d'où

$$\lim (M\sqrt{dz_0} - N) = \lim N \left(-\frac{dz_0}{4} - \frac{dz_0^2}{32}, \dots \right),$$

et comme

$$\lim_{dz_0=0} (N) = -\frac{1}{6} (Z - z_0)^2 \log t = 0,$$

nous voyons que $M\sqrt{dz_0} - N$ est, en dz_0 , d'ordre supérieur à un.

Donc

$$J_A = \iiint_{(A'B'C')} F V_A d\tau + \mu dz_0^{1+h} + \dots$$

Le premier terme est seul à conserver et l'on a

$$(5) \quad H = \iiint_{(A'B'C')} F(x, y, z) [V_A(x, y, z) - V_{A'}(x, y, z)] d\tau.$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$V_A(x, y, z) = V_{A'}(x, y, z + dz_0),$$

d'où

$$\begin{aligned} V_A(x, y, z) - V_{A'}(x, y, z) &= V_{A'}(x, y, z + dz_0) - V_{A'}(x, y, z) \\ &= dz_0 \frac{\partial V_{A'}(x, y, z)}{\partial z} \quad (1). \end{aligned}$$

Lorsque dz_0 s'approche de zéro, A' vient en A , $V_{A'}$ devient V_A et l'on a

$$(6) \quad 2\pi u(x_0, y_0, z_0) = - \iiint_{(A'B'C')} F \frac{\partial V_A}{\partial z} d\tau,$$

résultat assez surprenant par sa simplicité.

(1) Pour être rigoureux on ne peut appliquer cette formule que dans une région où $V_{A'}$ et $\frac{\partial V_{A'}}{\partial z}$ soient finis.

Or la première fonction est infinie sur la verticale passant par A' et la deuxième est infinie sur le cône $A'B'C'$. On isolera donc la verticale par un petit cylindre vertical et le cône $A'B'C'$ par un cône ou un hyperboloïde intérieur à ce cône. Dans les petits volumes ainsi isolés on remplacera $(V_A - V_{A'})$ par $2V_{A'}$ et l'on verra que l'influence de ces volumes infiniment petits est nulle.

D'ailleurs $\frac{\partial V_A}{\partial z}$ ayant un signe constant, on peut écrire

$$\begin{aligned} 2\pi u(x_0, y_0, z_0) &= -F(\xi, \eta, \zeta) \iiint_{(Abc)} \frac{\partial V_A}{\partial z} d\tau \\ &= -F(\xi, \eta, \zeta) \theta(A) \iiint_{(ABC)} \frac{\partial V_A}{\partial z} d\tau, \end{aligned}$$

ou enfin

$$(7) \quad u(x_0, y_0, z_0) = -F(\xi, \eta, \zeta) \theta(A) \frac{1}{2} (Z - z_0)^2.$$

θ dépend de la position de A, de la forme de S, mais on sait que l'on a

$$0 < \theta < 1.$$

Avec cette expression (7), prise au lieu de l'expression (4), on peut intégrer l'équation (1) et voici comment :

3. Soit d'abord une intégrale u_0 de l'équation

$$A(u_0) = f(x, y, z),$$

satisfaisant aux conditions aux limites, calculée par (3). u_0 est connu, soit M_0 une limite supérieure de son module dans le champ d'intégration.

Intégrons alors

$$A(u_1) = h u_0$$

(avec zéro pour conditions aux limites).

D'après (7) on a

$$|u_1(x, y, z)| < M_0 \frac{(Z - z)^2}{2} K$$

(K étant une limite supérieure du module de $h(x, y, z)$ dans le domaine considéré).

Intégrons maintenant

$$A(u_2) = h u_1$$

(toujours avec zéro aux limites).

Nous aurons

$$\begin{aligned} |2\pi u_2(x_0, y_0, z_0)| &< M_0 K \iint\int_{(ABC)} \frac{(Z-z)^2}{2} \frac{1}{\sqrt{z^2-r^2}} d\tau \\ &< M_0 K 2\pi \frac{(Z-z_0)^4}{2 \cdot 4} \end{aligned}$$

et, pour un point (x, y, z) quelconque,

$$|u_2(x, y, z)| < M_0 K \frac{(Z-z)^4}{2 \cdot 4}.$$

L'intégrale cherchée est

$$(8) \quad u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

convergente, car on a

$$|u_n(x_0, y_0, z_0)| < M_0 K \frac{(Z-z_0)^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}.$$

4. On voit, par la formule (7), que l'intégrale u de l'équation $A(u) = F$ (prise avec zéro pour conditions aux limites) tend bien vers zéro lorsque (x_0, y_0, z_0) vient sur S .

Par des considérations analogues, j'ai obtenu des expressions explicites de

$$\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y},$$

qui donnent l'intégrale de

$$A(u) = a(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} + hu + f(x, y, z),$$

et qui permettent de vérifier que la dérivée conormale tend bien vers la valeur donnée lorsque le point (x_0, y_0, z_0) vient sur S .

Je réserve cette exposition, assez compliquée, pour une époque ultérieure.

5. Quelques remarques essentielles sont à faire sur les données et sur la surface S qui les porte.

Pour que le cône Λ^0 coupe S d'une manière bien définie, unique, il faut que les plans tangents à S fassent avec le plan horizontal un angle $\leq 45^\circ$.

Si la convexité de S n'est pas constamment dirigée dans le sens de \overline{Oz} ou de $\overline{Oz'}$, il y aura une ligne de points d'inflexion.

Cela est acceptable, toujours à la condition que le plan tangent soit incliné à 45° au plus.

Enfin soit un plan Π incliné à 45° sur le plan horizontal, la *co-normale au plan vient sur le plan*. Donc toute surface enveloppe de plans Π est une surface privilégiée, pour laquelle le fait de donner u est seul nécessaire et suffisant pour déterminer l'intégrale. Tout polyèdre formé de plans Π est dans les mêmes conditions. Si les plans Π passent par un point fixe, leur enveloppe est un cône Λ , parallèle à

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

6. On voit le rôle considérable que jouent les cônes Λ dans l'intégration des équations $A(u) = F$, avec des données qui ne sont aucunement supposées analytiques. Ces cônes font partie des *caractéristiques* définies par M. Beudon (1) au point de vue de Cauchy, c'est-à-dire au point de vue des fonctions analytiques.

Ce rapprochement nous paraît intéressant.

Si nous voulons maintenant comparer les équations

$$A(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F$$

et

$$\Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F,$$

nous voyons la raison de la grande distance qui les sépare dans ce fait :

L'analogue du cône Λ relatif à $A(u)$ c'est la sphère réduite à un point $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, pour $\Delta(u)$.

L'analogue de l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ de $\Delta u = 0$, c'est, pour $A(u) = 0$, l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(x^2 + y^2 - z^2)}}$ (ε étant ± 1 de manière que l'intégrale soit réelle).

(1) Voir dans ce *Bulletin*, t. XXV; 1897.

La première intégrale est *isotrope* et n'a qu'un point singulier. Pour la deuxième, les axes de coordonnées doivent conserver toujours la même direction, et il y a une surface indéfinie de singularités, le cône Λ

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

En plus, cette deuxième intégrale se compose en réalité de deux intégrales distinctes, suivant que l'on est à l'intérieur ou à l'extérieur du cône Λ .

Cette remarque toute simple m'avait fait pressentir le rôle important des cônes Λ avant que je connusse un Mémoire fondamental de M. Volterra (¹).

J'aurai à revenir sur cette séparation de l'espace en *deux régions* et sur la forme de S au point de vue de l'*Analysis situs*.

Je ne saurais oublier de dire, en terminant, que la lecture, malheureusement un peu difficile, des premières pages du Mémoire de M. Volterra, et l'étude des beaux travaux de M. Picard sur les approximations successives (²), ont été pour moi le premier fondement solide de ces recherches.

(¹) *Acta mathematica*, t. XVIII; 1894.

(²) *Journal de Mathématiques*, 1890. Voir aussi la *Note* insérée dans le t. IV des *Leçons sur les surfaces* de M. Darboux.