BULLETIN DE LA S. M. F.

M. PÉTROVITCH

Remarque sur les zéros des séries de Taylor

Bulletin de la S. M. F., tome 29 (1901), p. 303-312.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__303_0>

REMARQUE SUR LES ZÉROS DES SÉRIES DE TAYLOR;

Par M. MICHEL PETROVITCH.

1. En cherchant une limite supérieure du module d'un déterminant quelconque, dont on connaît des limites supérieures des modules des éléments, M. Hadamard (¹) est arrivé au théorème suivant :

Étant donné le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

si l'on désigne par s_h la somme des carrés des modules des éléments

$$a_{h,1}, \quad a_{h,2}, \quad \dots, \quad a_{h,n}$$

appartenant à la ligne horizontale du rang h, le carré du module de Δ ne saurait jamais surpasser la valeur du produit

$$s_1 s_2 s_3 \dots s_n.$$

Le théorème, convenablement appliqué, conduit à quelques résultats relatifs aux séries de Taylor, que nous allons indiquer.

2. Considérons la série

$$(1) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

où les coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots$ peuvent être réels ou imaginaires, z représentant une variable complexe. Le coefficient a_0 peut toujours être supposé différent de zéro; s'il n'en était pas ainsi, on envisagerait la série obtenue en divisant (1) par z^p, où p est l'ordre du zéro $z = 0$.

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XVII, p. 240-246; 1893.

Soit r le rayon de convergence de (1) et posons

$$z = ty, \tag{2}$$

y étant une nouvelle variable complexe et t un nombre réel, positif et inférieur à r. La série deviendra

$$f(z) = \varphi(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots \tag{3}$$

avec

$$b_n = a_n t \tag{4}$$

et avec le rayon de convergence

$$r_1 = \frac{r}{t} > 1. \tag{5}$$

Posons

$$\frac{1}{\varphi(y)} = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \ldots \tag{6}$$

les coefficients c_n seront donnés par

$$c_n = \frac{(-1)^n}{b_0^{n+1}} \Delta_n \tag{7}$$

avec

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & \ldots\ldots & \ldots & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots & b_0 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Posons ensuite

$$\left\{ \begin{array}{ll} s_1 & = |b_0|^2 + |b_1|^2, \\ s_2 & = |b_0|^2 + |b_1|^2 + |b_2|^2, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_{n-1} & = |b_0|^2 + |b_1|^2 + \ldots + |b_{n-1}|^2, \\ \mathrm{P}_n & = |b_1|^2 + |b_2|^2 + \ldots + |b_n|^2. \end{array} \right. \tag{9}$$

D'après le théorème de M. Hadamard, cité précédemment, on aura

$$\Delta_n \leqq \sqrt{s_1 s_2 \ldots s_{n-1} \mathrm{P}_n}. \tag{10}$$

Comparons la série (6) avec la série

$$\alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \ldots, \tag{11}$$

dont les coefficients sont donnés par

$$\alpha_n = \left|\frac{1}{b_0}\right|^{n+1} \sqrt{s_1 s_2 \ldots s_{n-1} P_n}. \tag{12}$$

D'après l'inégalité

$$|c_n| \leqq \alpha_n,$$

la série (6) convergera pour toute valeur de y pour laquelle converge la série (11). Or comme on a, pour $n = \infty$,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} &= \frac{|b_0|}{\sqrt{s_n}} \sqrt{\frac{P_n}{P_{n+1}}}, \\ \lim s_n &= \sum_0^\infty |b_n|^2 = \sum_0^\infty |a_n t^n|^2, \\ \lim \frac{P_n}{P_{n+1}} &= \lim \frac{|b_1|^2 + |b_2|^2 + \ldots + |b_n|^2}{|b_1|^2 + |b_2|^2 + \ldots + |b_{n+1}|^2} = 1, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

en posant

$$\rho = \lim \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}},$$

on aura

$$\rho = \frac{|a_0|}{\sqrt{\varpi(t)}} \tag{14}$$

avec

$$\varpi(t) = \sum_0^\infty |a_n t^n|^2, \tag{15}$$

et la série (15) sera convergente d'après l'inégalité $t < r$. La valeur ρ sera donc différente de zéro, et comme elle représente le rayon de convergence de la série (11), la série (6) convergera aussi dans un cercle de rayon au moins égal à ρ. La fonction $\varphi(y)$ ne saurait donc avoir aucun zéro de module inférieur à ρ. Et comme on a

$$z = ty,$$

la fonction $f(z)$ ne saurait avoir aucun zéro de module inférieur à

$$\mu = \frac{|a_0 t|}{\sqrt{\varpi(t)}}, \tag{16}$$

quelle que soit la valeur réelle de t comprise entre o et r.

On en tire le résultat suivant :

Si l'on désigne par λ *le plus petit module des zéros de la série*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{17}$$

et si l'on forme la fonction

$$u(z) = \left|\frac{1}{z^2}\right| \sum_0^\infty |a_n z^n|^2, \tag{18}$$

on aura

$$\lambda > \frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}}, \tag{19}$$

quelle que soit la valeur de la variable complexe z *à l'intérieur du cercle de convergence de la série* (17).

3. Le résultat précédent offre le moyen de calculer des limites inférieures des modules des valeurs annulant une série de Taylor donnée, lorsqu'on se donne la loi des coefficients ou, du moins, les valeurs numériques d'un nombre suffisant de ces coefficients.

A cet effet on donnera à z une valeur quelconque de module inférieur à r et on la remplacera dans le second membre de (19); dans le cas particulier où les coefficients a_0, a_1, a_2, ... sont tous réels, on prendra pour z une valeur réelle quelconque comprise entre o et r. Chacune de ces valeurs, remplacée dans l'expression

$$\mu = \frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}}$$

conduirait à une limite inférieure des modules des zéros de la série considérée. L'évaluation d'une telle limite se trouve ainsi ramenée au calcul exact ou approché de la somme de la série (18) sous la forme fixée. On peut alors procéder comme ceci :

1° Ou bien calculer la valeur approchée de $u(z)$ et une limite supérieure de l'erreur commise;

2° Ou bien, ce qui est préférable, *substituer aux coefficients* $|a_n|^2$ *de la série* (18) *d'autres coefficients* e_n, *choisis de manière qu'on ait*

$$e_n \geqq |a_n|^2$$

et que l'on sache calculer la somme de la nouvelle série

$$\Phi(z) = \sum_0^\infty e_n z^{2n}$$

ainsi obtenue. Il est manifeste, d'après ce qui précède, que *si l'on pose*

$$\frac{\Phi(z)}{z^2} = v(z)$$

et que l'on attribue à z une valeur réelle quelconque comprise entre o *et r, la valeur correspondante*

$$\mu = \sqrt{\frac{e_0}{v(z)}} = z\sqrt{\frac{e_0}{\Phi(z)}}$$

serait une limite inférieure cherchée.

En attribuant à z diverses valeurs réelles et positives inférieures à r, on aurait diverses valeurs de la limite inférieure μ. Pour qu'une telle limite soit la plus élevée possible, il faut que la valeur correspondante de $v(z)$ soit la plus petite possible. Examinons donc la manière dont variera cette dernière fonction lorsque z croît de o jusqu'à r.

Si, pour abréger l'écriture, on entend par z le module de z, on aura

$$v(z) = \frac{e_0}{z^2} + e_1 + \sum_2^\infty e_n z^{2n-2},$$

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{2e_0}{z^3} + 2\sum_2^\infty (n-1)e_n z^{2n-3},$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{6e^0}{z^4} + 2\sum_2^\infty (n-1)(n-2)e_n z^{2n-4}.$$

Pour z positif et très petit la dérivée $\frac{dv}{dz}$ sera négative; lorsque z commence à croître à partir de $z = 0$, les deux cas suivants peuvent se présenter :

1° Ou bien cette dérivée restera constamment négative dans l'intervalle de $z = 0$ à $z = r$ (on reconnaîtra ce cas à ce qu'elle est négative pour $z = r$);

2° Ou bien elle s'annule dans cet intervalle (on le reconnaîtra à ce qu'elle est positive pour $z = r$). L'équation

$$\frac{dv}{dz} = 0$$

ne saurait d'ailleurs avoir plus d'une racine réelle et positive, puisque la dérivée $\frac{d^2 v}{dz^2}$ est positive pour une valeur réelle et positive quelconque de z.

Dans le premier cas, la fonction $v(z)$ décroîtra constamment pendant que z varie de 0 à r; la meilleure valeur à prendre pour z serait donc $z = r$.

Dans le second cas (qui se présentera toujours lorsque r est suffisamment grand) $v(z)$ présente un minimum pour une certaine valeur, $z = \alpha$, comprise entre 0 et r et ce minimum est alors unique. La meilleure valeur à prendre pour z serait, dans ce cas, $z = \alpha$.

Par suite, *la plus grande valeur de* μ, *donnée par la proposition précédente, sera*

$$\mu = \sqrt{\frac{e_0}{v(r)}} = r\sqrt{\frac{e_0}{\Phi(r)}}, \qquad \text{si} \quad \left[\frac{dv}{dz}\right]_{z=r} < 0;$$

$$\mu = \sqrt{\frac{e_0}{v(\alpha)}} = \alpha\sqrt{\frac{e_0}{\Phi(\alpha)}}; \qquad \text{si} \quad \left[\frac{dv}{dz}\right]_{z=r} > 0.$$

Une telle limite est toujours inférieure au rayon de convergence r, puisqu'on a $\alpha < r$ et

$$\frac{e_0}{\Phi(z)} < 1$$

pour toute valeur réelle et positive de z.

4. Appliquons ceci à quelques cas spéciaux.

Premier exemple. — Considérons la série

$$a + \frac{z}{\sqrt{1}} + \frac{z^2}{\sqrt{2}} + \frac{z^3}{\sqrt{3}} + \ldots$$

(où a est une constante réelle et positive quelconque), ayant $r = 1$

comme rayon de convergence. En faisant

$$e_n = \frac{1}{n}, \qquad e_0 = a^2,$$

on aura

$$v(z) = \frac{1}{z^2}\left(a^2 + \frac{z^2}{1} + \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{3} + \ldots\right) = \frac{1}{z^2}[a^2 - \log(1 - z^2)]$$

L'équation $\frac{dv}{dz} = 0$ est ici

$$\frac{z^2}{1 - z^2} + \log(1 - z^2) - a^2 = 0;$$

elle admet une racine $z = \alpha$ comprise entre 0 et 1, et cette racine est unique pour cet intervalle. Une limite inférieure des modules des zéros de la série considérée, comprise dans l'intervalle $(0, 1)$, sera par conséquent donnée par

$$\mu = \frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - \log(1 - \alpha^2)}}.$$

Remarquons aussi que la valeur

$$z = \sqrt{1 - \frac{1}{e}} = 0,795\ldots$$

étant comprise à l'intérieur du cercle de convergence de la série donnée, en la remplaçant dans $v(z)$ on trouve que la série ne saurait s'annuler pour aucune valeur de z de module inférieur à

$$\frac{0,795\,a}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Deuxième exemple. — Considérons la série

$$a + \frac{z}{\sqrt{1}} + \frac{z^2}{\sqrt{1.2}} + \frac{z^3}{\sqrt{1.2.3}} + \ldots,$$

convergente dans tout le plan. En faisant

$$e_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \qquad e_0 = a^2,$$

on aura

$$v(z) = \frac{1}{z^2}\left(a^2 + \frac{z^2}{1} + \frac{z^4}{1.2} + \frac{z^6}{1.2.3} + \ldots\right) = \frac{1}{z^2}(a^2 - 1 + e^{z^2}).$$

L'équation

$$\frac{dv}{dz} = 0$$

est ici

$$(z^2 - 1)e^{z^2} - a^2 + 1 = 0,$$

et aura une seule racine positive comprise

$$\begin{array}{llll} \text{entre} & 1 \text{ et } \sqrt{1 + \dfrac{a^2 - 1}{e}}, & \text{si} & a > 1; \\ \text{entre} & 0 \text{ et } 1, & \text{si} & 0 < a < 1. \end{array}$$

En désignant cette racine par α, une limite inférieure des modules des zéros de la série (25) sera

$$\frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - 1 + e^{\alpha^2}}}.$$

Troisième exemple. — Pour la série

$$a + \frac{z}{\sqrt{1}} + \frac{z^3}{\sqrt{3}} + \frac{z^5}{\sqrt{5}} + \ldots,$$

on aura

$$v(z) = \frac{1}{z^2}\left(a^2 + \frac{z^2}{1} + \frac{z^6}{3} + \frac{z^{10}}{5} + \ldots\right) = \frac{1}{z^2}\left[a^2 + \frac{1}{2}\log\frac{1+z^2}{1-z^2}\right].$$

En faisant par exemple $z = \frac{1}{2}$, laquelle valeur est comprise à l'intérieur du cercle de convergence de la série, on trouve que la valeur

$$\frac{a}{2\sqrt{a^2 + k}},$$

avec

$$k = \frac{1}{2}\log\frac{5}{3} = 0,11092,$$

représente une limite inférieure cherchée.

Quatrième exemple. — Pour la série

$$a + \frac{z^2}{\sqrt{1.2}} + \frac{z^4}{\sqrt{1.2.3.4}} + \frac{z^6}{\sqrt{1.2.3\ldots6}} + \ldots,$$

une telle limite serait représentée par

$$\frac{a\alpha}{\sqrt{a^2+\frac{1}{2}(e^{\alpha^2}+e^{-\alpha^2})}},$$

où α désigne la racine réelle et positive unique de l'équation transcendante

$$z^2(e^{z^2}-e^{-z^2})-e^{z^2}-e^{-z^2}-2a^2=0.$$

5. J'ajouterai, en terminant, une proposition simple qui résulte immédiatement des résultats du n° 2.

De l'inégalité

$$\sum |a_n z^n|^2 < \left[\sum |a_n z^n|\right]^2,$$

en posant

$$w(z)=\frac{1}{z^2}\sum |a_n z^n|^2,$$

on tire

$$w(z)<\frac{1}{z^2}\left[\sum |a_n z^n|\right]^2.$$

D'autre part, d'après ce qui précède, une limite inférieure des modules des zéros de la série

$$\sum a_n z^n$$

sera donnée par

$$\mu=\frac{|a_0|}{\sqrt{w(z)}}.$$

Par suite, en posant

$$\theta(z)=\frac{\Sigma |a_n z^n|}{|z|},$$

on aura

$$\mu>\frac{|a_0|}{\theta(z)},$$

et cela quelle que soit la valeur de z à l'intérieur du cercle de convergence de la série considérée.

Il s'ensuit la proposition suivante :

Une fonction $f(z)$ holomorphe dans une circonférence C *décrite autour de l'origine comme centre, ne s'annulant pas* *à l'origine, ne saurait avoir de zéro de module inférieur à l'expression*

$$\frac{|f(0)|}{M},$$

où M *désigne la plus grande valeur que prend le module du rapport de la fonction majorante de* $f(z)$ *à la variable* z *pour les valeurs de* z *comprises à l'intérieur de la circonférence* C.

Dans le cas particulier où les valeurs de la fonction $f(z)$ et de ses dérivées successives pour $z = 0$ sont toutes réelles et positives, et si l'on désigne par λ le plus petit parmi les modules des singularités de la fonction, *celle-ci ne saurait s'annuler pour aucune valeur réelle ou imaginaire de* z *dont le module serait inférieur à la plus grande valeur que puisse prendre la fonction*

$$\frac{f(0)z}{f(z)},$$

pour les valeurs réelles et positives de z, *comprises entre* 0 *et* λ.