BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

Sur la déformation des surfaces et sur certaines transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 106-108.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__106_0>

SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES ET SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

Par M. L. RAFFY.

J'ai montré [1] que l'on peut aborder le problème de la déformation des surfaces en partant des équations bien connues

$$(1)\qquad \begin{cases} x''_{u^2} - A x'_u - A_1 x'_v = \Delta\, H a, \\ x''_{uv} - B x'_u - B_1 x'_v = \Delta'\, H a, \\ x''_{v^2} - C x'_u - C_1 x'_v = \Delta''\, H a, \end{cases}$$

$$(2)\qquad a = \sqrt{1 - \frac{G x'^2_u - 2 F x'_u x'_v + E x'^2_v}{H^2}},$$

$$(3)\qquad \Delta\Delta'' - \Delta'^2 = -k^2 = \frac{1}{R_1 R_2},$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux. Les conditions d'intégrabilité du système (1) fournissent les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Delta'}{\partial u} - \dfrac{\partial\Delta}{\partial v} = C\Delta - 2B_1\Delta' + A_1\Delta'', \\[2ex] \dfrac{\partial\Delta'}{\partial v} - \dfrac{\partial\Delta''}{\partial u} = C\Delta - 2B\,\Delta' + A\,\Delta'', \end{cases}$$

qui sont, avec la relation (3), les *formules fondamentales* de la théorie des surfaces.

Si l'on introduit la courbure moyenne h, on aura

$$(5)\qquad 2 H h = G\Delta - 2F\Delta' + E\Delta''.$$

Pour satisfaire aux relations (3) et (5), j'ai posé (*loc. cit.*)

$$(6)\qquad \begin{cases} \Delta = \dfrac{2Hh - 2k(Et + F)}{Et^2 + 2Ft + G}, \\[2ex] \Delta' = \dfrac{-2Hht + k(Et^2 - G)}{Et^2 + 2Ft + G}, \\[2ex] \Delta'' = \dfrac{2Hht^2 + 2k(Ft^2 + Gt)}{Et^2 + 2Ft + G}. \end{cases}$$

---

[1] *Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces* (*Bull. Soc. Math.*, t. XXV, 1897). — *Voir* aussi une Note *Sur le problème général de la*

Substituant ces valeurs de Δ, Δ', Δ'' dans les conditions (4), on a entre h et la fonction auxiliaire t deux équations aux dérivées partielles du premier ordre qui sont telles qu'en éliminant h'_u on élimine en même temps h'_v. On obtient ainsi h en fonction *explicite* de t, t'_u, t'_v par une équation du premier degré.

La substitution de h dans l'une des équations dont il s'agit conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre pour t; cette équation est *linéaire* par rapport aux dérivées secondes. Cette *équation en t* peut être considérée comme étant l'équation du problème; car, t étant connu, h, Δ, Δ', Δ'' le sont aussi et les équations (1) prennent la forme

$$(7)\qquad F_i(u, v, x'_u, x'_v, x''_{u^2}, x''_{uv}, x''_{v^2}) = f_i(u, v, t, t'_u, t'_v) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et constituent un système complètement intégrable, déterminant la fonction x.

D'autre part, il est bien connu qu'en éliminant $a, \Delta, \Delta', \Delta''$ entre les équations (1), (2) et (3), on obtient l'équation de déformation

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &(x''_{u^2} - A x'_u - A_1 x'_v)(x''_{v^2} - C x'_v - C_1 x'_v) - (x''_{uv} - B x'_u - B_1 x'_v)^2 \\ &\quad = -k^2 H^2 \left(1 - \frac{G x'^2_u - 2 F x'_u x'_v + E x'^2_v}{H^2}\right). \end{aligned}\right.$$

On peut donc passer de cette équation en x à l'équation en t par la transformation que définissent les trois équations (7). D'après ce qui précède, on peut *algébriquement* éliminer *à la fois* t, t'_u et t'_v entre ces trois équations, ce qui donne l'équation en x (cela tient à ce que t'_u et t'_v n'y figurent que par l'intermédiaire de h; il suit aussi de là que l'on peut exprimer t et h en fonction des dérivées premières et secondes de x). Au contraire, pour éliminer x, il faut différentier le système (7), et l'on obtient une *seule* équation pour la fonction t, équation qui est du second ordre. Je crois devoir signaler les transformations telles que (7), qui me paraissent mériter une étude approfondie.

J'ajoute que l'on pourrait aussi laisser subsister la fonction h dans les seconds membres des équations (7), qui prendraient alors

---

déformation des surfaces (*Comptes rendus*, t. CXIV, 1892) et une Communication *Sur une transformation des formules de Codazzi* (*Bull. Soc. Math.*, t. XX, 1892).

la forme $\varphi_i(u, v, h, t)$. En écrivant les conditions d'intégrabilité de l'expression différentielle

$$x''_{u^2}\,du^2 + 2x''_{uv}\,du\,dv + x''_{v^2}\,dv^2,$$

on retrouverait les deux équations que nous avons obtenues précédemment en substituant les valeurs de Δ, Δ', Δ'' dans les conditions (4). Entre ces deux équations, qui sont, comme nous l'avons dit, de la forme

$$(4)' \quad f(u, v, h, h'_u, h'_v, t, t'_u, t'_v) = 0, \qquad \varphi(u, v, h, h'_u, h'_v, t, t'_u, t'_v) = 0,$$

nous avons éliminé *h*. On peut aussi éliminer *t*. Résolvant par rapport à t'_u, t'_v et identifiant les valeurs de t''_{uv}, on obtient une équation qui détermine *t* en fonction de *u*, *v* de *h* et de ses dérivées des deux premiers ordres. (Cette équation ne se réduit à une identité que pour les surfaces qui ont même élément linéaire et même courbure moyenne *h*, c'est-à-dire qui présentent une série continue de déformations conservant leurs courbures principales.) Exprimant que la fonction *t* ainsi définie satisfait aux deux équations $(4)'$, on obtient pour la fonction *h* *deux* équations aux dérivées partielles du *troisième* ordre, qui sont équivalentes à l'équation du second ordre en *t*, et par suite aussi à l'équation (8).