BULLETIN DE LA S. M. F.

G. COMBEBIAC

Sur les équations générales de l'élasticité

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 108-110.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__108_1>

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLASTICITÉ;

Par M. Combebiac.

Les composantes de l'effort qui s'exerce sur l'élément superficiel, en un point appartenant à un milieu élastique, s'expriment par une substitution linéaire homogène en fonction des cosinus directeurs de la normale à l'élément.

Les neuf coefficients, qui devraient ainsi intervenir, ont leur nombre réduit à six, en vertu de la condition que les pressions exercées sur la surface d'une portion infinitésimale de matière doivent donner lieu à une résultante unique pour faire équilibre aux forces d'inertie et aux forces extérieures, lesquelles, supposées appliquées à chaque masse élémentaire, se réduisent en effet à une résultante unique, à des infiniment petits près, d'ordre supérieur à celui du volume de la portion de matière considérée.

Or cette dernière hypothèse est en défaut tout au moins pour une substance aimantée placée dans un champ magnétique. Dans ce cas, une particule, si petite soit-elle, est toujours soumise à un couple.

En désignant par I l'intensité d'aimantation au point considéré, par F la force magnétique en ce point, par θ l'angle formé par les deux directions de la force et de l'aimantation, une particule de volume $d\varpi$ est soumise à un couple du même ordre que $d\varpi$, dont le moment a pour expression

$$\mathrm{FI}\sin\theta\, d\varpi$$

et dont l'axe représentatif a une direction rectangulaire avec celles de la force et de l'aimantation.

On n'aperçoit aucun motif pour exclure *a priori* ce cas de la théorie de l'élasticité.

Pour établir les équations de l'équilibre ou du mouvement du milieu, opérons la décomposition d'Helmholtz sur la substitution linéaire homogène qui donne les expressions des composantes T_x, T_y, T_z de la tension en fonction des cosinus directeurs α, β, γ de la normale à l'élément superficiel, de manière que cette substitution prenne la forme suivante :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} T_x &= N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma + M\gamma - N\beta,\\ T_y &= T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma + N\alpha - L\gamma,\\ T_z &= T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma + L\beta - M\alpha.\end{aligned}\right.$$

Les équations relatives à une translation virtuelle sont

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho(X - J_x) &= \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y},\\ \rho(Y - J_y) &= \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z},\\ \rho(Z - J_z) &= \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x},\end{aligned}\right.$$

où ρ représente la densité au point considéré, J_x, J_y, J_z les projections de l'accélération sur les axes de coordonnées, X, Y, Z celles de la force extérieure rapportée à l'unité de masse.

Quant aux équations relatives à une rotation virtuelle autour de l'origine, elles expriment, toutes réductions faites, en suivant pas à pas le calcul classique, mais en tenant compte de l'existence d'un couple, que les composantes de l'axe représentatif de ce couple sont respectivement égales à

$$2L, \quad 2M, \quad 2N.$$

Il en résulte que, dans les équations (2), les quantités L, M, N représentent le demi-couple extérieur et doivent être considérées comme des fonctions données des coordonnées x, y, z.

On voit que ces équations (2) ne diffèrent des équations générales de l'élasticité écrites sous la forme habituelle que par la présence des termes dépendant de L, M, N.