BULLETIN DE LA S. M. F.

E. MAILLET

Sur les équations différentielles et la théorie des ensembles

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 195-201.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__195_0>

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET LA THÉORIE DES ENSEMBLES;

Par M. Edmond Maillet.

I.

Nous avons montré antérieurement (1) l'existence de catégories de fonctions ne satisfaisant à aucune équation différentielle rationnelle, de même que Liouville avait établi (2) l'existence d'une infinité de nombres transcendants. M. Cantor (3) a obtenu un résultat analogue à celui de Liouville, mais moins parfait, en se basant sur la théorie des ensembles : *L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, tandis que l'ensemble des nombres transcendants a la puissance du continu.*

Nous nous proposons ici d'étendre aux équations différentielles rationnelles et à d'autres analogues, grâce à des conventions convenables, le théorème de M. Cantor.

II.

Soit

$$(1) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^k y}{dx^k}\right) = 0 = \sum a_{l, i_0, \ldots, i_k} x^l y^{i_0} \ldots y^{(k) i_k}$$

une équation différentielle dont les coefficients sont des polynomes entiers en x de degré $\leqq I$, et dont les paramètres sont ou nuls, ou indéterminés, mais $\neq 0$.

La solution générale aux environs de $x = 0$ est

$$(2) \qquad y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_k, a_{l, i_0, \ldots, i_k}),$$

$C_1, C_2, \ldots, C_k$ étant des constantes arbitraires.

Considérons les solutions obtenues en donnant à un nombre λ quelconque de ces k constantes la valeur 0 (λ prenant successive-

---

(1) *Journ. de Math.*, 1902, p. 137.

(2) *Journ. de Math.*, 1851, et Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898, p. 26.

(3) Borel, *Id.*, p. 24.

ment les valeurs o, 1, 2, ..., k). Le nombre des solutions Φ distinctes ainsi obtenues est fini.

Considérons alors les équations différentielles de la forme (1) de degrés I, $j_0, j_1, \ldots, j_k \leqq \delta$ en $x, y, \ldots, y^{(k)}$, en ne regardant comme distinctes que celles où les paramètres indéterminés ne sont pas tous coefficients des mêmes termes en $x^l y^{i_0} \ldots y^{(k)^{i_k}}$. Le nombre N des solutions Φ correspondantes est limité.

Il en résulte immédiatement que l'ensemble des solutions Φ distinctes, compté comme on vient de le faire, est dénombrable.

Considérons au contraire les fonctions [1]

$$(3) \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

telles que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < k < 1 :$$

Ces séries sont toutes convergentes.

Attribuons aux paramètres $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ des valeurs nulles ou indéterminées. L'ensemble des séries ainsi obtenues a évidemment la même puissance que l'ensemble des nombres

$$\frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_2}{2^2} + \ldots + \frac{\gamma_n}{2^n} + \ldots,$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ prennent les valeurs o et 1 dans un ordre quelconque, c'est-à-dire que l'ensemble de tous les nombres compris entre o et 1 exprimé dans le système de numération de base 2 ; l'ensemble de ces séries a donc la puissance du continu.

Donc, parmi les séries y précédentes, il y a un ensemble de

---

[1] On peut aussi écrire la solution générale de l'équation (1) sous la forme

$$(1\ bis) \qquad y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_t x_t + \varphi_1 x_{t+1} + \ldots + \varphi_\lambda x_{t+\lambda} + \ldots,$$

où les paramètres $\alpha_0, \ldots, \alpha_t$ sont arbitraires en tout ou en partie, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda, \ldots$, sont des fonctions des paramètres $\alpha_0, \ldots, \alpha_t$.

La série la plus générale de la forme (3) comprendra la série

$$(2\ bis) \quad y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_t x_t + (\varphi_1 + \alpha_{t+1}) x_{t+1} + \ldots + (\varphi_\lambda + \alpha_{t+\lambda}) x_{t+\lambda} + \ldots,$$

où $\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_{t+\lambda}, \ldots$ sont des paramètres arbitraires.

Nous classerons dans un même type les séries (1 *bis*) pour lesquelles ceux des coefficients $\alpha_0, \ldots, \alpha_t$ qui sont nuls ont les mêmes indices ; le nombre des types est fini ; nous classerons dans un même type les séries (2 *bis*) pour lesquelles ceux des coefficients $\alpha_0, \ldots, \alpha_{t+\lambda}, \ldots$ qui sont nuls ont les mêmes indices ; l'ensemble de ces types forme un ensemble ayant la puissance du continu.

séries ayant la puissance du continu et qui ne sont pas solutions des équations différentielles rationnelles [1].

Le raisonnement s'applique encore aux séries convergentes aux environs d'un point quelconque $x = x_0$.

Ceci n'est pas spécial aux séries (3) : tout ensemble de séries qui aura, d'après les mêmes définitions, la puissance du continu, jouira de la même propriété ; on pourra ainsi appliquer ce qui précède aux fonctions entières, aux fonctions entières de genre fini, aux fonctions entières d'un ordre déterminé. Il suffira de vérifier ce dernier point.

Soit

$$y = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots, \tag{4}$$

une fonction entière d'ordre ρ fini : on peut à volonté y supposer, quel que soit n, $b_n \neq 0$ ou nul ; le même raisonnement restera alors applicable.

On peut même l'appliquer à des catégories encore plus spéciales de fonctions entières ; par exemple aux séries

$$\gamma_0 + \frac{\gamma^1 x}{1!} + \frac{\gamma_2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{\gamma_n x^n}{n!} + \ldots,$$

où $\gamma_n = 0$ ou $\gamma_n \neq 0$ (γ_n limité, mais indéterminé) à volonté; ou encore aux fonctions entières à coefficients rationnels, et, comme nous le verrons plus loin, aux fonctions entières à croissance régulière.

Il en résulte *a fortiori* que les équations différentielles à paramètres rationnels forment un ensemble dénombrable, tout comme lenrs solutions, tandis que les séries à coefficients rationnels, même jouissant de propriétés particulières convenables, forment un ensemble ayant la puissance du continu [2].

On peut obtenir des théorèmes semblables pour les séries divergentes sommables.

---

[1] On peut dire encore que celles des séries y qui ne sont pas solutions des équations différentielles (1) de degré $\leqq \delta$, quel que soit δ, forment un ensemble ayant la puissance du continu.

[2] Nous établissons au fond quelque chose d'un peu plus précis : nous formons, pour chaque catégorie de séries, non un ensemble de séries, mais un ensemble

Considérons les séries divergentes

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{F}(zx)\,dx,$$

l'intégrale étant prise le long d'un chemin d'intégration convenable et

$$\mathrm{F}(z) = \sum_0^\infty \frac{\alpha_n z^n}{\Gamma(pn+1)}.$$

$\mathrm{F}(z)$ étant une fonction entière d'ordre réel ρ inférieur à l'ordre apparent d $(dp \geqq 1)$,

$$\mathrm{F}(z) = e^{a_0 z^d}\,\Phi(z).$$

Ces séries dépendent d'une infinité dénombrable de coefficients arbitraires pour chaque valeur de ρ et de d: donc, pour chaque valeur de ρ et de d, l'ensemble de ces séries a la puissance du continu et il n'y en a qu'une infinité dénombrable qui puisse être solution d'une équation différentielle ([1]).

On peut aussi considérer les solutions fournies par les développements en fraction continue convergente ou divergente: prenons par exemple les fractions continues de Stieltjes

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cdots}}},$$

ou, ce qui revient au même, les séries divergentes

$$c_0 - \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} - \frac{c_3}{z^3} + \cdots.$$

On arrive à des résultats analogues.

---

de types de séries, les séries d'un même type étant caractérisées par ce fait que les paramètres nuls pour ces séries ont les mêmes indices. Par conséquent, nous établissons en fait ceci; c'est que, dans chaque catégorie de séries, les types comprenant des séries susceptibles d'être solutions sont en nombre dénombrable, alors que l'ensemble de ces types a la puissance du continu.

([1]) Les solutions divergentes formelles aux environs de $x = 0$ dépendent d'un plus k paramètres arbitraires pour les équations d'ordre k. On le vérifie par substitution directe.

Prenons plus particulièrement les séries de Stieltjes définies de la manière suivante :

Soit la fonction entière d'ordre apparent $d >$ l'ordre réel ρ

$$F(z) = e^{-a_0 z^d}\Phi(z),$$

comme précédemment, avec a_0 réel > 1.

Prenons

$$\Phi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$

et, si $b_i \leqq \dfrac{1}{(m!)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}$,

$$|F(z)| < A_1 e^{z^d(1-a_0)},$$

en sorte que l'exposant de $F(z)$ est constamment négatif pour z positif. On a toujours

$$|F(z)| < A e^{-m\sqrt{z}},$$

quel que soit z positif, et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{F(u)\,du}{z+u}$ est (¹) la valeur d'une série de Stieltjes.

A chaque valeur de d et ρ correspond un ensemble de séries $F(z)$ et de fonctions de Stieltjes ayant la puissance du continu.

Les séries de cet ensemble qui peuvent être solutions d'équations différentielles rationnelles forment un ensemble dénombrable.

Les mêmes propriétés ont lieu pour toutes les séries précédemment considérées quand on y suppose certaines conditions complémentaires remplies de façon que le nouvel ensemble obtenu ait encore la puissance du continu. Ainsi on pourra supposer que, dans ces séries, les coefficients d'indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots$ (p croissant indéfiniment) soient tous nuls, le nombre des coefficients non nuls restant infini. Pour un système de valeurs donné de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots$ un même théorème a lieu.

Enfin, un raisonnement de même nature s'applique aux équations différentielles

(5) $$f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = \Sigma A y^{i_0} \ldots, \qquad y^{(k)i_k} = 0,$$

(¹) Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, p. 72 et suivantes.

A étant un polynome entier en x, $\xi_1, \ldots, \xi_l$ (l limité) et $\xi_1, \ldots, \xi_l$ des fonctions de x, les mêmes pour toutes les équations (5) : par exemple $\log x$, $\log\log x$, $\ldots$, e^x, e^{e^x}, $\ldots$, $p(x)$, $\zeta(x)$, $\sigma(x)$, $p'(x)$, $\ldots$.

Le nombre des résultats analogues est pour ainsi dire indéfini.

On peut résumer ce qui précède dans l'énoncé suivant;

Théorème. — *Considérons l'ensemble des séries*

$$y = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n + \ldots, \tag{I}$$

jouissant ou non de certaines propriétés particulières convenables. Ne regardons comme distinctes, pour une valeur de x_0 donnée, deux de ces séries que si un paramètre au moins de même indice nul dans l'une ne l'est pas dans l'autre, les paramètres non nuls restant indéterminés; au contraire ne distinguons pas deux séries pour lesquelles les paramètres nuls ont tous mêmes indices.

Considérons d'autre part des fonctions $\xi_1, \ldots, \xi_l$ (l limité) de x, par exemple $\log x$, $\log\log x$, $\ldots$, e^x, e^{e^x}, $\ldots$, $p(x)$, $\zeta(x)$, $\ldots$, *et les équations différentielles*

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = \Sigma A y^{i_0} \ldots y^{(k) i_k} = 0, \tag{II}$$

les A *étant des polynomes de degré limité en x, $\xi_1, \ldots, \xi_l$, de coefficients α, β, $\ldots$. Regardons comme distinctes les solutions de* (II),

$$\varphi(\alpha, \beta, \ldots, C_1, \ldots, C_k).$$

qui dépendent des paramètres α, β, $\ldots$, et de k constantes arbitraires, si un paramètre ou une constante de même indice nul dans l'une ne l'est pas dans l'autre, les paramètres ou constantes non nuls restant indéterminés; au contraire, ne distinguons pas deux solutions pour lesquelles les paramètres nuls ont tous mêmes indices.

L'ensemble des solutions convergentes ou divergentes de (II) *est dénombrable. L'ensemble des séries* (I) *pour x_0 donné a la puissance du continu dans les divers cas suivants dont certains sont conséquences des autres :*

1° (I) *est une série convergente de rayon de convergence donné;*

2° (I) *est une fonction entière ou une fonction entière d'ordre fini déterminé;*

3° (I) *jouit des mêmes propriétés que ci-dessus, mais a ses coefficients rationnels;*

4° (I) *est une série divergente*

$$\sum_0^\infty \alpha_n z_n = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} F(zx)\,dx,$$

sommable, avec

$$F(z) = e^{a_0 z^d}\Phi(z),$$

$\Phi(z)$ *étant une fonction entière d'ordre* ρ *inférieur à l'ordre apparent d entier,* ρ *et d étant donnés* $(d\rho \geqq 1)$;

5° (I) *appartient à certaines catégories de fractions continues et de séries divergentes de Stieltjes; ainsi si*

$$F(z) = e^{-a_0 z^d}\Phi(z), \qquad a_0 \text{ réel} > 1,$$
$$\Phi(z) = b_0 + b_1 z + b^2 z^2 + \ldots,$$
$$b_i = \frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}},$$

les mêmes propriétés ont lieu pour les séries de Stieltjes dont la valeur est

$$\int_0^\infty \frac{F(u)\,du}{z+u},$$

pour chaque valeur de ρ *et d (d entier* $> \rho$*).*

Enfin les mêmes propriétés restent vraies quand on suppose, dans les séries précédentes, soit tous les coefficients rationnels, soit une infinité dénombrable de coefficients d'indices donnés nuls, des coefficients en nombre infini restant à volonté nuls ou indéterminés.