BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

# Sur le réseau diagonal conjugué

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 30 (1902), p. 226-233.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__226_1>

## SUR LE RÉSEAU DIAGONAL CONJUGUÉ;

Par M. L. Raffy.

Je me propose d'étudier ici le réseau conjugué que découpent sur une surface les courbes tangentes en chacun de leurs points à l'un des diamètres conjugués égaux de l'indicatrice. Ces diamètres égaux étant les diagonales du rectangle des axes, nous donnerons aux courbes considérées le nom de *lignes diagonales* et au réseau qu'elles forment le nom de *réseau diagonal* (*conjugué*). Il est évident que ce réseau est réel sur les portions de surface où les lignes asymptotiques sont imaginaires et inversement. C'est d'ailleurs un résultat que nous allons retrouver en comparant les lignes diagonales, les lignes asymptotiques et les lignes de courbure.

1. Théorème I. — *Si l'on considère les tangentes aux lignes diagonales, aux lignes asymptotiques et aux lignes de courbure qui se croisent en un point ordinaire d'une surface quelconque, ces trois couples de droites, pris deux à deux, forment des faisceaux harmoniques.*

En effet, les lignes diagonales étant conjuguées par rapport à l'indicatrice, forment un faisceau harmonique avec les directions asymptotiques de cette conique; admettant comme bissectrices les lignes de courbure, elles forment avec elles un faisceau harmonique. D'autre part, les lignes asymptotiques forment un faisceau harmonique avec les lignes diagonales et avec les lignes de courbure, puisque ces deux couples de droites sont des diamètres conjugués de l'indicatrice. Il suit de là que les lignes de courbure forment faisceau harmonique avec les lignes diagonales et aussi avec les lignes asymptotiques.

2. Théorème II. — *Si l'on rapporte une surface à l'un des trois réseaux formés par les lignes diagonales, par les lignes asymptotiques et par les lignes de courbure, prises successivement pour lignes coordonnées* ($u =$ const., $v =$ const.) *les équations différentielles des deux autres réseaux ne contiennent pas de terme en* $du\,dv$ *et se déduisent l'une de l'autre par le changement de* $dv^2$ *en* $-dv^2$.

En effet, l'élément linéaire d'une surface étant

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

la direction définie par le couple ($du$, $dv$) est, comme on sait, la diagonale du parallélogramme qui a pour côtés consécutifs le segment $\sqrt{\mathrm{E}}\,du$, porté sur la tangente à la courbe $v = \text{const.}$ issue du point considéré $(u, v)$, et le segment $\sqrt{\mathrm{G}}\,dv$ porté sur la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ Son coefficient angulaire relativement à ces axes est donc

$$m = \frac{\sqrt{\mathrm{G}}\,du}{\sqrt{\mathrm{E}}\,dv}.$$

Or, pour que deux droites forment avec les axes coordonnés un faisceau harmonique, il faut et il suffit que leurs coefficients angulaires soient égaux et de signes contraires. Chacun des deux réseaux autres que celui auquel on rapporte la surface a donc une équation différentielle qui ne contient pas de terme en $du\,dv$.

Soient $m_1$ et $m_2$ les coefficients angulaires des tangentes aux courbes de l'un de ces réseaux; soient $m_3$ et $m_4$ ceux de l'autre réseau. Nous venons de voir que l'on a

$$m_1 + m_2 = 0, \qquad m_3 + m_4 = 0.$$

La condition générale pour que le faisceau des quatre droites de coefficients angulaires $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ soit harmonique

$$(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) = 2(m_1 m_2 + m_3 m_4)$$

se réduit en conséquence à

$$m_1^2 + m_3^2 = 0,$$

ce qui exige que les équations différentielles des deux réseaux ne diffèrent l'une de l'autre que par le changement de $dv^2$ en $-dv^2$. Le théorème est donc complètement démontré.

3. *Équation différentielle des lignes diagonales.* — Supposons la surface rapportée à des coordonnées curvilignes quelconques et proposons-nous de former l'équation différentielle des lignes diagonales. On sait que le rayon de courbure R de la section normale déterminée par la direction $(du, dv)$ a pour expression

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2}{\delta\,du^2 + 2\delta'\,du\,dv + \delta''\,dv^2}.$$

Réciproquement, étant donné R, cette équation définit les deux directions $(du, dv)$ et $(d'u, d'v)$ pour lesquelles la section normale a un rayon de courbure égal à R. Pour exprimer que ces deux directions sont conjuguées, on a la condition bien connue

$$\delta\, du\, d'u + \delta'(du\, d'v + dv\, d'u) + \delta''\, dv\, d'v = 0,$$

qui donne ici

$$R = \frac{G\delta - 2F\delta' + E\delta''}{2(\delta\delta'' - \delta'^2)} = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Ainsi R est la demi-somme des rayons de courbure principaux [1]. En conséquence, l'équation différentielle des lignes diagonales en coordonnées curvilignes quelconques est

$$\frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{\delta\,du^2 + 2\delta'\,du\,dv + \delta''\,dv^2} = \frac{G\delta - 2F\delta' + E\delta''}{2(\delta\delta'' - \delta'^2)}. \tag{1}$$

Cette équation permet de déterminer par quadratures les lignes diagonales des hélicoïdes, des surfaces spirales et des quadriques. Elle montre que, sur les surfaces minima, les lignes diagonales coïncident avec les lignes de longueur nulle.

Si l'on a égard à l'équation des lignes asymptotiques

$$\delta\,du^2 + 2\delta'\,du\,dv + \delta'\,dv^2 = 0 \tag{2}$$

et à celle des lignes de courbure

$$(F\delta - E\delta')du^2 + (G\delta - E\delta'')du\,dv + (G\delta' - F\delta'')dv^2 = 0, \tag{3}$$

on peut retrouver d'une autre manière l'équation (1). Ecrivons-la, en effet, comme suit :

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0. \tag{4}$$

Exprimons que les deux directions ainsi définies forment un faisceau harmonique avec les directions (2) des lignes asymptotiques; nous aurons

$$L\delta'' - 2M\delta' + N\delta = 0. \tag{5}$$

Mais, comme elles forment aussi un faisceau harmonique avec les directions (3) des lignes de courbure, on a pareillement

$$L(G\delta' - F\delta'') - M(G\delta - E\delta'') + N(F\delta - E\delta') = 0. \tag{6}$$

---

[1] C'est ce que l'on eût pu voir directement, en appliquant à la conique indicatrice le premier théorème d'Apollonius.

Éliminant L, M, N entre les trois équations (4), (5), (6) on obtient l'équation des lignes diagonales sous la forme

$$(1)' \qquad \begin{vmatrix} du^2 & -2\,du\,dv & dv^2 \\ \delta'' & 2\delta' & \delta \\ G\delta' - F\delta'' & G\delta - E\delta'' & F\delta - E\delta' \end{vmatrix} = 0.$$

**4.** La comparaison des équations (1), (2) et (3) permet de vérifier le théorème II; elle conduit, en effet, très simplement aux conclusions suivantes.

*Une surface étant rapportée à ses asymptotiques* ($\delta = \delta'' = 0$) *les équations*

$$E\,du^2 + G\,dv^2 = 0, \qquad E\,du^2 - G\,dv^2 = 0$$

*appartiennent : la première aux lignes diagonales, la seconde aux lignes de courbure.*

*Une surface étant rapportée à ses lignes de courbure* ($F = \delta' = 0$) *les équations*

$$\delta\,du^2 - \delta''\,dv^2 = 0, \qquad \delta\,du^2 + \delta''\,dv^2 = 0$$

*appartiennent : la première aux lignes diagonales, la seconde aux lignes asymptotiques.*

*Une surface étant rapportée à ses lignes diagonales, on a*

$$(7) \qquad \delta' = 0, \qquad \frac{\delta}{E} = \frac{\delta''}{G},$$

*et les deux équations*

$$\delta\,du^2 - \delta''\,dv^2 = 0, \qquad \delta\,du^2 + \delta''\,dv^2 = 0,$$

*appartiennent : la première aux lignes de courbure, la seconde aux lignes asymptotiques.*

**5.** *Surfaces rapportées au réseau diagonal.* — On peut obtenir directement les conditions

$$(7) \qquad \delta' = 0, \qquad \frac{\delta}{E} = \frac{\delta''}{G},$$

qui caractérisent le réseau des lignes coordonnées comme étant le réseau diagonal : il suffit d'exprimer que les lignes coordonnées sont conjuguées et qu'elles admettent pour bissectrices les lignes de courbure.

Introduisons ces conditions dans les équations fondamentales de la théorie des surfaces :

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\delta\delta''-\delta'^2}{\mathrm{H}^2}=\frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}\qquad(\mathrm{H}^2=\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2),\\ &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta'}{\mathrm{H}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta}{\mathrm{H}}\right)=\mathrm{C}_1\frac{\delta}{\mathrm{H}}-2\mathrm{B}_1\frac{\delta'}{\mathrm{H}}+\mathrm{A}_1\frac{\delta''}{\mathrm{H}},\\ &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta'}{\mathrm{H}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta''}{\mathrm{H}}\right)=\mathrm{C}\frac{\delta}{\mathrm{H}}-2\mathrm{B}\frac{\delta'}{\mathrm{H}}+\mathrm{A}\frac{\delta''}{\mathrm{H}}.\end{aligned}\right.$$

Si nous posons

$$(8)\qquad \lambda\mathrm{H}=\frac{\delta}{\mathrm{E}}=\frac{\delta''}{\mathrm{G}},$$

ces équations s'écrivent

$$(\mathrm{I})'\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}\sqrt{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}},\\ &-\frac{\partial\log\lambda}{dv}=\mathrm{C}_1+\mathrm{A}_1\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}+\frac{\mathrm{E}'_v}{\mathrm{E}},\\ &-\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}=\mathrm{A}+\mathrm{C}\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}+\frac{\mathrm{G}'_u}{\mathrm{G}}.\end{aligned}\right.$$

Grâce à la valeur trouvée pour $\lambda$, l'élément linéaire de la représentation sphérique, dont l'expression générale est

$$d\sigma^2=\frac{\mathrm{G}\delta-2\mathrm{F}\delta'+\mathrm{E}\delta''}{\mathrm{H}^2}(\delta\,du^2+2\delta'\,du\,dv+\delta''\,dv^2)-\frac{\delta\delta''-\delta'^2}{\mathrm{H}^2}(\mathrm{E}\,du^2+2\mathrm{F}\,du\,dv+\mathrm{G}\,dv^2),$$

se réduit dans le cas présent à

$$(9)\qquad d\sigma^2=\frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}(\mathrm{E}\,du^2-2\mathrm{F}\,du\,dv+\mathrm{G}\,dv^2).$$

On remarquera l'analogie de cette formule avec celle qu'on obtient quand la surface est rapportée à ses lignes asymptotiques, savoir

$$d\sigma^2=-\frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}(\mathrm{E}\,du^2-2\mathrm{F}\,du\,dv+\mathrm{G}\,dv^2).$$

Considérons maintenant les équations analogues aux équations (1), où figurent, au lieu des coefficients E, F, G de l'élément linéaire $ds^2$ et des fonctions A, $A_1$, B, $B_1$, C, $C_1$ qui s'en déduisent, les coefficients $e, f, g$ de $d\sigma^2$ et les fonctions $a$, $a_1$, $b$, $b_1$, $c$, $c_1$, homologues des précédentes. Ces formules sont les suivantes:

$$(\text{II})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta'}{h}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta}{h}\right) = c_1\,\frac{\delta}{h} - 2b_1\,\frac{\delta'}{h} + a_1\,\frac{\delta''}{h},\\ &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta'}{h}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\delta''}{h}\right) = c\,\frac{\delta}{h} - 2b\,\frac{\delta'}{h} + a\,\frac{\delta''}{h},\end{aligned}\right. \qquad (h^2 = eg - f^2),$$

auxquelles il faudrait joindre celle qui exprime que la courbure totale de la forme quadratique

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

est égale à 1.

En vertu de la relation (9) on a

$$(10)\quad e = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}, \qquad f = -\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}, \qquad g = \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}, \qquad h = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}.$$

Si donc on pose

$$(11)\qquad \frac{\delta}{e} = \frac{\delta''}{g} = \mu h,$$

et qu'on tienne compte de l'expression de $\lambda$, il viendra

$$(\text{II})'\quad \left\{\begin{aligned} &\mu = \frac{\sqrt{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}}{\sqrt{eg}},\\ &-\frac{\partial \log \mu}{\partial v} = c_1 + a_1\,\frac{g}{e} + \frac{e'_v}{e},\\ &-\frac{\partial \log \mu}{\partial u} = a + c\,\frac{e}{g} + \frac{g'_u}{g},\end{aligned}\right.$$

relations dont l'analogie avec les équations (I)$'$ est complète. On en déduit

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(c_1 + a_1\,\frac{g}{e} + \frac{e'_v}{e}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(a + c\,\frac{e}{g} + \frac{g'_u}{g}\right).$$

Telle est *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme*

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

*dont la courbure totale est égale à* 1, *soit l'élément linéaire de la représentation sphérique d'une surface, rapportée à ses* *lignes diagonales*. En effet, l'équation (12) étant vérifiée, les deux dernières équations (II)' déterminent une fonction $\mu$, à un facteur constant près. Alors la première des équations (II)' fait connaître le produit $R_1 R_2$; les relations (11) fournissent $\delta$ et $\delta''$; on prend $\delta'$ nul; enfin les formules (10) donnent E, F, G. On connaît donc les six fonctions E, F, G, $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, ce qui détermine la surface, à la position près.

6. On pourrait, à l'aide des formules (I)' ou (II)', chercher à déterminer des surfaces sur lesquelles le réseau diagonal possède certaines propriétés, telles que celle dont nous allons donner un exemple.

Considérons les surfaces de translation dont les deux familles de génératrices sont des courbes planes, situées dans des plans rectangulaires. L'équation générale de ces surfaces est

$$z = X(x) + Y(y).$$

Pour ces surfaces, on a visiblement

$$E = 1 + X'^2, \qquad G = 1 + Y'^2,$$
$$\frac{\delta}{X''} = \frac{\delta''}{Y''}, \qquad \delta' = 0.$$

Si donc on veut déterminer les fonctions X et Y de façon que les génératrices planes ($x =$ const., $y =$ const.) soient lignes diagonales, on trouvera

$$\frac{X''}{1 + X'^2} = \frac{Y''}{1 + Y'^2}.$$

Ces deux rapports doivent être constants. L'intégration est immédiate et l'on obtient la surface

$$e^{mz} = \cos mx \cos my \qquad (m = \text{const.}),$$

dont les lignes de courbure se déterminent par quadratures et sont, en projection sur le plan des $xy$, également inclinées sur les axes coordonnés.