G. FONTENÉ

Les six équations distinctes du triangle en métrique aninvolutive

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 128-135.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__128_1>

LES SIX ÉQUATIONS DISTINCTES DU TRIANGLE EN MÉTRIQUE ANINVOLUTIVE;

Par M. G. Fontené.

1. Les principes de la Métrique aninvolutive ont été exposés en 1892 dans un Ouvrage ayant pour titre : *L'hyperespace;* un résumé de ces principes a paru dans ce *Bulletin*, t. XXVI, p. 176, en ce qui concerne l'espace ordinaire.

En se bornant à la Géométrie plane, les éléments métriques que considère la Métrique aninvolutive sont relatifs à deux coniques F et φ doublement tangentes. Étant donnés deux points A et B, la droite AB coupe la conique F en deux points F′, F″, et, si l'on désigne par R le rapport anharmonique (A, B, F′, F″), on appelle *pseudo-distance* des deux points A et B la quantité

$$\overline{AB} = \frac{1}{2i}\log R;$$

le *pseudo-angle* de deux droites α et β se définit d'une manière corrélative, en considérant cette fois la conique φ. Si l'on suppose que F et φ sont deux ellipses imaginaires, dont les équations ont des coefficients réels, les quantités R et ρ sont des imaginaires de module 1, et l'on a, par exemple, avec $\overline{AB}$ réel,

$$\left\{\begin{aligned} \cos\overline{AB} + i\sin\overline{AB} &= e^{i\overline{AB}} = \sqrt{R}, \\ \cos\overline{AB} - i\sin\overline{AB} &= e^{-i\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{R}}, \end{aligned}\right.$$

ou

$$\frac{i\sin\overline{AB}}{R-1} = \frac{\cos\overline{AB}}{R+1} = \frac{1}{2\sqrt{R}}.$$

On définit alors pour chaque droite un paramètre spécial T, pour chaque point un paramètre spécial θ, et l'on pose par exemple

$$\sigma(A, B) = \frac{\sin\overline{AB}}{\sin T},$$

$$\gamma(A,B) = \frac{\sin(T - \overline{AB})}{\sin T}, \qquad \gamma(B, A) = \frac{\sin(T + \overline{AB})}{\sin T},$$

d'où il suit que l'on a

$$\sigma^2(A, B) = 1 - \gamma(A, B) \times \gamma(B, A);$$

on pose encore

$$\frac{1}{\tau}(A, B) = \frac{\gamma(A, B)}{\sigma(A, B)}, \qquad \frac{1}{\tau}(B, A) = \frac{\gamma(B, A)}{\sigma(B, A)},$$

les deux σ étant de signes contraires. On définit de même les quantités $\sigma(\alpha, \beta)$, ...

Le caractère essentiel de la Métrique aninvolutive est de considérer les figures en position. La Métrique de Cayley et Klein n'est qu'une transformation homographique de la Métrique de Lobatchefsky, et le fait que les éléments métriques des figures dépendent de leur position disparaît par réduction à la Métrique aneuclidienne; une réduction analogue n'a pas lieu par la Métrique aninvolutive, fondée sur la considération de *deux* coniques F et φ. L'existence d'un paramètre spécial T pour chaque droite, d'un paramètre spécial θ pour chaque point, fait d'ailleurs du plan dans lequel on opère un être géométrique non homogène. En Métrique ordinaire, tous les paramètres ont la valeur commune $\frac{\pi}{2}$; les σ sont alors des sinus de pseudo-distances ou de pseudo-angles, les γ sont des cosinus, les $\frac{1}{\tau}$ sont des cotangentes.

2. Il existe une simple infinité de figures ayant les mêmes éléments métriques relativement aux deux coniques F et φ; une transformation homographique permet en effet de réduire ces deux coniques à un système de deux cercles concentriques. Voyons quelles sont les conséquences de ce fait pour un triangle.

Soit un triangle ABC, dont les côtés sont portés par les axes α, β, γ; les éléments métriques fondamentaux sont au nombre de douze : trois pseudo-distances, trois pseudo-angles, trois paramètres T, trois paramètres θ; ou encore : six comoments tels que $\gamma(B, C)$, $\gamma(C, B)$, auxquels se rattachent trois quantités $\sigma(B, C)$, et, d'autre part, six comoments tels que $\gamma(\beta, \gamma)$, $\gamma(\gamma, \beta)$, ... Comme un triangle dépend de six paramètres, il suit de ce qu'on a vu plus haut que cinq éléments métriques d'un triangle suffisent à déterminer tous les autres; il existe donc sept relations distinctes entre les douze éléments fondamentaux d'un triangle. Je ne puis démontrer ici que l'une de ces relations contient une constante remarquable, que l'on doit regarder comme étant le paramètre spécial du plan dans lequel on opère; cette relation est d'une forme assez compliquée quand on la considère comme ayant lieu entre les six paramètres relatifs au triangle et la constante du plan; je n'ai pas essayé de l'écrire avec les γ et la constante. Je la laisserai entièrement de côté, et *je donnerai quatre groupes équivalents de six relations entre les douze éléments* γ.

En écrivant pour chaque groupe une seule des six relations qui le composent, on a d'abord

$$\text{(I)} \qquad \gamma(B, C) = \gamma(B, A) \times \gamma(A, C) - \sigma(B, A)\sigma(A, C) \times \gamma(\gamma, \beta),$$
$$\text{(II)} \qquad \gamma(\beta, \gamma) = \gamma(\beta, \alpha) \times \gamma(\alpha, \gamma) - \sigma(\beta, \alpha)\sigma(\alpha, \gamma) \times \gamma(C, B);$$

comme extension de la formule de Trigonométrie sphérique

$$\sin b \cot a - \sin C \cot A = \cos b \cos C,$$

où l'on considère les éléments a, A, b, C (avec les angles extérieurs), on a encore

$$\text{(III)} \qquad \sigma(C, A)\frac{1}{\tau}(C, B) + (\sigma\beta, \alpha)\frac{1}{\tau}(\beta, \gamma) = \gamma(C, A)\gamma(\beta, \alpha),$$

$$\text{(IV)} \qquad \sigma(A, C)\frac{1}{\tau}(B, C) + \sigma(\alpha, \beta)\frac{1}{\tau}(\gamma, \beta) = \gamma(A, C)\gamma(\alpha, \beta).$$

On a aussi

$$\text{(V)} \qquad \frac{\sigma(B, C)}{\sigma(\beta, \gamma)} = \frac{\sigma(C, A)}{\sigma(\gamma, \alpha)} = \frac{\sigma(A, B)}{\sigma(\alpha, \beta)},$$

les trois rapports étant de même signe par hypothèse.

3. Nous adopterons ici les notations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma(B, C) = a, \\ \sigma(C, A) = b, \\ \sigma(A, B) = c, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \gamma(B, C) = a', \\ \gamma(C, A) = b', \\ \gamma(A, B) = c', \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \gamma(C, B) = a'', \\ \gamma(A, C) = b'', \\ \gamma(B, A) = c'', \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} \sigma(\beta, \gamma) = A, \\ \sigma(\gamma, \alpha) = B, \\ \sigma(\alpha, \beta) = C, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \gamma(\beta, \gamma) = A', \\ \gamma(\gamma, \alpha) = B', \\ \gamma(\alpha, \beta) = C', \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \gamma(\gamma, \beta) = A'', \\ \gamma(\alpha, \gamma) = B'', \\ \gamma(\beta, \alpha) = C''; \end{array}\right.$$

on a donc

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 = 1 - a'a'', \\ b^2 = 1 - b'b'', \\ c^2 = 1 - c'c'', \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} A^2 = 1 - A'A'', \\ B^2 = 1 - B'B'', \\ C^2 = 1 - C'C'', \end{array}\right.$$

et, par hypothèse, les trois rapports $\frac{a}{A}$, $\frac{b}{B}$, $\frac{c}{C}$ sont de même signe.

On a alors les quatre groupes de formules

$$
\text{(I)}\quad\left\{\begin{array}{llll}
(1) & a'' = b'c' - bcA', & (1') & a' = b''c'' - bcA'',\\
(2) & b'' = c'a' - caB', & (2') & b' = c''a'' - caB'',\\
(3) & c'' = a'b' - abC', & (3') & c' = a''b'' - abC'';
\end{array}\right.
$$

$$
\text{(II)}\quad\left\{\begin{array}{llll}
(1) & A'' = B'C' - BCa', & (1') & A' = B''C'' - BCa'',\\
(2) & B'' = C'A' - CAb', & (2') & B' = C''A'' - CAb'',\\
(3) & C'' = A'B' - ABc', & (3') & C' = A''B'' - ABc'';
\end{array}\right.
$$

$$
\text{(III)}\quad\left\{\begin{array}{llll}
(1) & b\dfrac{a''}{a} + C\dfrac{A'}{A} = -b'C'', & (1') & c\dfrac{a'}{a} + B\dfrac{A''}{A} = -c''B',\\
(2) & c\dfrac{b''}{b} + A\dfrac{B'}{B} = -c'A'', & (2') & a\dfrac{b'}{b} + C\dfrac{B''}{B} = -a''C',\\
(3) & a\dfrac{c''}{c} + B\dfrac{C'}{C} = -a'B'', & (3') & b\dfrac{c'}{c} + A\dfrac{C''}{C} = -b''A';
\end{array}\right.
$$

$$
\text{(IV)}\quad\left\{\begin{array}{llll}
(1) & b\dfrac{a'}{a} + C\dfrac{A''}{A} = -b''C', & (1') & c\dfrac{a''}{a} + B\dfrac{A'}{A} = -c'B'',\\
(2) & c\dfrac{b'}{b} + A\dfrac{B''}{B} = -c''A', & (2') & a\dfrac{b''}{b} + C\dfrac{B'}{B} = -a'C'',\\
(3) & a\dfrac{c'}{c} + B\dfrac{C''}{C} = -a''B', & (3') & b\dfrac{c''}{c} + A\dfrac{C'}{C} = -b'A''.
\end{array}\right.
$$

On passe des formules de gauche à celles de droite en permutant par exemple b et c, B et C, et échangeant les accents ($'$) et ($''$); le groupe (III) est son propre corrélatif, les formules (1) et (1′) se correspondant.

On a encore

$$
\text{(V)}\qquad \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{abc}{\sqrt{\delta}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{ABC} = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}},
$$

en posant

$$
\delta = \begin{vmatrix} 1 & c' & b'' \\ c'' & 1 & a' \\ b' & a'' & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & C' & B'' \\ C'' & 1 & A' \\ B' & A'' & 1 \end{vmatrix},
$$

et en disposant des signes des deux radicaux; ces formules sont analogues aux formules de Trigonométrie euclidienne

$$
\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} = \frac{\left(\frac{S}{R}\right)}{\sin A\ldots} = \frac{2S}{\left(\frac{S}{R}\right)}.
$$

4. Pour établir l'équivalence des groupes de formules (I) et (II), montrons par exemple que les formules (I) donnent les formules (II). En vertu des formules (I), le déterminant adjoint au déterminant δ est

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab\,C' & ac\,B'' \\ ba\,C'' & b^2 & bc\,A' \\ ca\,B' & cb\,A'' & 1 \end{vmatrix}.$$

La considération des trois mineurs relatifs aux éléments a^2, b^2, c^2 donne d'abord l'égalité des quatre premiers rapports (V); le mineur relatif à l'élément $bc\mathrm{A}'$ donne ensuite

$$a^2bc(\mathrm{B'C'} - \mathrm{A''}) = a' \times \delta$$

ou

$$\mathrm{B'C'} - \mathrm{A''} = a' \times \frac{\sqrt{\delta}}{ac} \times \frac{\sqrt{\delta}}{ab} = a' \times \mathrm{BC}.$$

On peut encore faire la démonstration en se limitant aux trois premiers des rapports (V). Les formules (1) et (1′), (2) et (2′) du groupe (I) donnent

$$c^2(b^2\mathrm{A'A''} - a^2\mathrm{B'B''}) = (a'a'' - b'b'')(1 - c'c'') = (b^2 - a^2)c^2$$

ou

$$a^2\mathrm{B}^2 = b^2\mathrm{A}^2;$$

les trois premiers rapports (V) sont donc égaux, étant donnée l'hypothèse faite sur les signes. Si l'on élimine c' entre les formules (1) et (3′) du groupe (I), on a

$$bc\mathrm{A}' = b'(a''b'' - ab\mathrm{C}'') - a'' = -b'ab\mathrm{C}'' - a''b^2,$$

ou

$$c\mathrm{A}' = -ab'\mathrm{C}'' - a''b,$$

ou encore

$$\mathrm{CA}' = -\mathrm{A}b'\mathrm{C}'' - a''\mathrm{B};$$

l'élimination de c'' entre (1′) et (3) donne de même

$$\mathrm{CB}'' = -\mathrm{B}a''\mathrm{C}' - b'\mathrm{A}:$$

si l'on élimine b' entre ces deux formules, ce qui se fait en les ajoutant après avoir multiplié la seconde par $-\mathrm{C}''$, on obtient

$$\mathrm{C}(\mathrm{A}' - \mathrm{B''C''}) = -a''\mathrm{B}(1 - \mathrm{C'C''}) = -a''\mathrm{BC}^2,$$

ce qui donne la formule (1′) du groupe (II). Ce dernier calcul n'est que l'extension d'un calcul bien connu de Trigonométrie sphérique. (*Cf.* par exemple Briot et Bouquet.)

5. Pour passer du groupe (I) au groupe (III), reprenons la formule

$$cA' = ab'C'' - a''b,$$

fournie par l'élimination de c' entre (1) et (3') de (I); si l'on divise par a, et si l'on remplace $\frac{c}{a}$ par $\frac{C}{A}$, on obtient la première des formules (III).

Inversement, pour passer du groupe (III) au groupe (I), éliminons C″ entre les formules (1) et (3') du groupe (III) écrites ainsi :

$$\frac{b}{a}a'' = -\frac{C}{A}A' - b'C'', \qquad \frac{b}{c}c' = -b''A' - \frac{A}{C}C'';$$

si l'on ajoute ces formules, après avoir multiplié la première par $\frac{A}{C}$, la seconde par $-b'$, on obtient

$$\frac{b}{a}\frac{A}{C}a'' - \frac{b}{c}b'c' = -A'b^2,$$

ou, en multipliant par $\frac{c}{b}$,

$$\frac{c}{a}\frac{A}{C}a'' - b'c' = -A'bc;$$

ce sera la première formule du groupe (I), si l'on peut remplacer $\frac{c}{a}$ par $\frac{C}{A}$. Il resterait donc à déduire des formules (III) l'égalité des trois premiers rapports (V); je n'ai pas réussi à faire ce calcul d'une manière simple.

Si l'équivalence des groupes (III) et (IV) était établie directement, on déduirait facilement de l'ensemble de ces deux groupes les égalités en question. En divisant par C la formule (1) du groupe (III) et la formule (2') du groupe (IV), et en éliminant $\frac{1}{C}$, on a facilement

$$a^2b''\frac{A'}{A} - b^2a''\frac{B'}{B} + (a^2 - b^2)\frac{C''}{C} = 0$$

ou

$$a^2\left(b''\frac{A'}{A} + \frac{C''}{C}\right) = b^2\left(a''\frac{B'}{B} + \frac{C''}{C}\right);$$

les formules (3′) du groupe (III) et (3) du groupe (IV) donnent alors

$$a^2 \frac{bc'}{CA} = b^2 \frac{ac'}{CB} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{A} = \frac{b}{B}.$$