

# BULLETIN DE LA S. M. F.

G. MITTAG-LEFFLER

## Sur le théorème de M. Jensen

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 32 (1904), p. 1-4.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1904\\_\\_32\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__1_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

BULLETIN  
DE LA  
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

---

SUR LE THÉORÈME DE M. JENSEN;

PAR M. G. MITTAG-LEFFLER.

M. Goursat vient de publier (*Bull. des Sciences math.*, octobre 1902) une nouvelle démonstration du théorème de M. Jensen (*Acta math.*, t. XXII), qui rattache ce théorème au théorème fondamental de Cauchy. J'ai employé dans mon enseignement une démonstration analogue qui paraît plus directe.

Soit  $f(z)$  une fonction méromorphe à l'intérieur d'un contour fermé  $S$ , comprenant dans son intérieur le point  $x$  sur lequel nous faisons, pour simplifier, la supposition qu'il ne sera ni un zéro ni un pôle. Supposons encore, pour simplifier, que  $f(z)$  soit holomorphe et différent de zéro sur le contour même. Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  les zéros de  $f(z)$  intérieurs au contour, chacun d'eux étant compté avec son degré de multiplicité, et  $b_1, b_2, \dots, b_m$  les pôles de  $f(z)$  intérieurs à  $S$ , chacun d'eux étant encore compté avec son degré de multiplicité.

Je me propose d'évaluer l'intégrale

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz$$

prise le long du contour  $S$  dans le sens direct. Je suppose que la variable part d'un point  $A$  sur le contour,  $\log f(z)$  ayant une valeur initiale déterminée. Je considère le contour fermé  $\tilde{S}$  formé de la courbe  $S$ , des circonférences  $c_\nu, k_\nu$ , de rayon  $\varepsilon$ , ayant pour centres les différents points  $a_\nu, b_\nu$ , et des lignes infiniment voisines tracées de part et d'autre d'un nombre de lignes situées entièrement à l'intérieur de  $S$  et reliant chacune un des points  $a_\nu$  et  $b_\nu$  avec le point  $A$ , en laissant les autres points  $a_\nu, b_\nu$ , ainsi que les points  $x$ , en dehors.

La fonction  $\log f(z)$  est holomorphe à l'intérieur du contour  $\bar{S}$ .  
En lui appliquant le théorème de Cauchy, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^n \left[ \int_{\Lambda}^{\alpha'_\nu} \frac{\log f(z)}{z-x} dz + \int^{c_\nu} \frac{\log f(z)}{z-x} dz + \int_{\alpha'_\nu}^{\Lambda} \frac{\log f(z) + 2\pi i}{z-x} dz \right] \\ + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^m \left[ \int_{\Lambda}^{\beta'_\nu} \frac{\log f(z)}{z-x} dz + \int^{k_\nu} \frac{\log f(z)}{z-x} dz + \int_{\beta'_\nu}^{\Lambda} \frac{\log f(z) + 2\pi i}{z-x} dz \right] \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz = \log f(x), \end{aligned}$$

$\alpha'_\nu$  et  $\beta'_\nu$  étant des points sur les circonférences  $c_\nu$  et  $k_\nu$ . En allant à la limite zéro avec  $\epsilon$  et en observant que les intégrales  $\int^{c_\nu}$ ,  $\int^{k_\nu}$  deviennent alors zéro, on obtient

$$\sum_{\nu=1}^n \int_{\alpha'_\nu}^{\Lambda} \frac{dz}{z-x} + \sum_{\nu=1}^m \int_{\beta'_\nu}^{\Lambda} \frac{dz}{z-x} + \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz = \log f(x).$$

On en tire

$$(2) \quad \log f(x) = \sum_{\nu=1}^n \log \frac{\alpha_\nu - x}{\Lambda - x} - \sum_{\mu=1}^m \log \frac{\beta_\mu - x}{\Lambda - x} + \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz.$$

Il s'ensuit

$$(3) \quad f(x) = \frac{(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x)}{(b_1 - x)(b_2 - x) \dots (b_m - x)} (\Lambda - x)^{m-n} e^{\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz}$$

et encore, en faisant  $z - x = re^{i\theta}$  et en supposant que  $S$  soit un cercle de rayon  $r$ , ayant pour centre le point  $x$ ,

$$(4) \quad |f(x)| = \frac{|a_1 - x| |a_2 - x| \dots |a_n - x|}{|b_1 - x| |b_2 - x| \dots |b_m - x|} r^{m-n} e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z)| d\theta}.$$

Cette dernière formule devient celle de M. Jensen si l'on y fait  $x = 0$ .

On a

$$\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz = \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right) dz.$$

En faisant dans la formule (3)  $x = 0$  et en supposant que ce

point ne soit ni un zéro ni un pôle, on obtient

$$(5) \quad f(0) = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_m} \Lambda^{m-n} e^{\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z} dz}.$$

En divisant (3) par (5), on obtient donc

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= f(0) \frac{\left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \left(1 - \frac{x}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)}{\left(1 - \frac{x}{b_1}\right) \left(1 - \frac{x}{b_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{b_m}\right)} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{x}{\Lambda}\right)^{m-n} e^{\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right) dz}. \end{aligned} \right.$$

Cette formule peut facilement être généralisée en écrivant

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z} dz + \frac{x}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^2} dz + \dots \\ &\quad + \frac{x^p}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^{p+1}} dz + \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right)^{p+1} dz \end{aligned}$$

et, en appliquant aux différentes intégrales

$$\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^2} dz, \quad \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^3} dz, \quad \dots, \quad \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^{p+1}} dz$$

le même procédé que nous avons employé auparavant pour les intégrales

$$\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz, \quad \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z} dz,$$

on obtient alors la formule

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= e^{\log f(0) + \frac{D \log f(0)}{1} x + \dots + \frac{D^p \log f(0)}{p} x^p} \\ &\quad \times \frac{\prod_{\nu=1}^n E\left(\frac{x}{a_\nu}, p\right)}{\prod_{\nu=1}^m E\left(\frac{x}{a_\nu}, p\right)} E\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right) e^{\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right)^{p+1} dz} \end{aligned} \right.$$

en ayant posé

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} E(z, p) &= (1-z) e^{z + \frac{1}{2}z^2 + \dots + \frac{1}{p}z^p} \\ E(z, 0) &= 1-z. \end{aligned} \right.$$

La formule (7) doit être mise à côté d'une autre qu'on obtient en partant de l'égalité (1)

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{f'(0)}{f(0)} + D \frac{f'(0)}{f(0)} \frac{x}{1} + \dots \\ &+ D^{(p-1)} \frac{f'(0)}{f(0)} \frac{x^{p-1}}{[p-1]} + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{x-a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p \\ &- \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{x-b_\nu} \left(\frac{x}{b_\nu}\right)^p + \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{1}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right)^p dz. \end{aligned} \right.$$

En faisant l'intégration par rapport à  $x$ , et en observant que

$$\begin{aligned} &\int^S \frac{f'(z)}{f(z)} \left[ \int_0^x \frac{1}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right)^p dx \right] dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{f'(z)}{f(z)} \left[ \log\left(1 - \frac{x}{z}\right) + \frac{x}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{x}{z}\right)^p \right] dz, \end{aligned}$$

on obtient

$$(10) \left\{ \begin{aligned} f(x) &= e^{\log f(0) + \frac{D \log f(0)}{1} x + \dots + \frac{D^p \log f(0)}{p!} x^p} \\ &\times \frac{\prod_{\nu=1}^n E\left(\frac{x}{a_\nu}, p\right)}{m} e^{-\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{f'(z)}{f(z)} \left[ \log\left(1 - \frac{x}{z}\right) + \frac{x}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{x}{z}\right)^p \right] dz} \\ &\prod_{\nu=1}^m E\left(\frac{x}{b_\nu}, p\right) \end{aligned} \right.$$

On revient immédiatement de la formule (10) à la formule (7) en intégrant

$$\int^S \frac{f'(z)}{f(z)} \left[ \log\left(1 - \frac{x}{z}\right) + \frac{x}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{x}{z}\right)^p \right] dz$$

par parties.

(1) Voir ma Note aux *Comptes rendus*, 20 février 1882.