

# BULLETIN DE LA S. M. F.

POTRON

**Sur quelques groupes d'ordres  $p^6$**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 32 (1904), p. 296-300.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1904\\_\\_32\\_\\_296\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__296_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**SUR QUELQUES GROUPES D'ORDRE  $p^6$  ;**

Par M. M. POTRON.

Cette Note a pour but de rectifier et de compléter les résultats obtenus dans ma Thèse de Doctorat touchant les  $g_{p^6}$  (groupes d'ordre  $p^6$ ), et de réparer en particulier une omission de quelque importance, commise dans la détermination des types de figure (11) (1111) dans le cas de  $p > 2$  (Thèse, p. 94, 95).

Il s'agit des types de  $g_{p^6}G$  ayant pour commutant le central et ne contenant pas de  $g_{p^5}$  de figure (111) (11). Leurs équations

peuvent toujours (Thèse, p. 92) être mises sous la forme

$$\begin{aligned} a^p = b^p = 1, \quad c^p = b^\beta a^\alpha, \quad d^p = b^\beta, \quad e^p = b^\beta, \quad f^p = b^{\beta''}, \\ (\alpha = 0, 1), \\ d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca, \quad f^{-1}cf = cb, \quad e^{-1}de = db^N, \\ f^{-1}df = da, \quad f^{-1}ef = e. \end{aligned}$$

Nous n'avons à nous occuper ici que du cas (Thèse, p. 93)  $\alpha = 1$ ,  $\beta'$  ou  $\beta''$  ou  $\beta''' \neq 0$ .

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est de la forme (Thèse, p. 76)

$$\begin{aligned} a_1 = b^\eta a^\xi, \quad b_1 = b^{\eta'} a^{\xi'}, \\ c_1 = f^u e^z d^y c^x b^k a^h, \quad d_1 = f^{u'} e^{z'} d^{y'} c^{x'} b^{k'} a^{h'}, \\ e_1 = f^{u''} e^{z''} d^{y''} c^{x''} b^{k''} a^{h''}, \quad f_1 = f^{u'''} e^{z'''} d^{y'''} c^{x'''} b^{k'''} a^{h'''}, \end{aligned}$$

avec les conditions (Thèse, p. 89, 90, 91, N désigne un non carré arbitraire) :

$$\begin{aligned} \xi' &\equiv \omega\eta, & \eta' &\equiv \omega N\xi, & \omega N &= \pm 1, \\ x' &\equiv \omega N^2 y, & y' &\equiv \omega N x, & z' &\equiv \omega N x, & u' &\equiv \omega N^2 z, \\ x'' &\equiv \omega N y'', & y'' &\equiv \omega x'', & z'' &\equiv \omega u'', & u'' &= \omega N z'', \\ \xi &\equiv xz'' - zx'' + yu'' - uy'', & \eta &\equiv xu'' - ux'' + N(yz'' - zy''), \\ \sqrt{\xi^2 - N\eta^2} &[(x^2 - Ny^2)(Nz'^2 - u'^2) \\ &+ (x''^2 - Ny''^2)(Nz''^2 - u''^2) + 2N(xy'' - yx'')(zu'' - uz'')] \neq 0, \end{aligned}$$

et il opère sur les exposants des équations de G une transformation définie (Thèse, p. 94) par

$$\begin{aligned} \xi + \beta_1 \omega \eta &\equiv z, & \eta + \beta_1 \omega N \xi &\equiv \beta x + \beta' y + \beta'' z + \beta''' u, \\ \beta'_1 \eta &\equiv N^2 y, & \beta'_1 \xi &\equiv \beta N y + \beta' x + \beta'' u + \beta''' N z, \\ \beta''_1 \omega \eta &\equiv x'', & \beta''_1 \omega N \xi &\equiv \beta x'' + \beta' y'' + \beta'' z'' + \beta''' u'', \\ \beta''_1 \eta &\equiv N y'', & \beta''_1 N \xi &\equiv \beta N y'' + \beta' x'' + \beta'' u'' + \beta''' N z''. \end{aligned}$$

Si l'on fait  $\beta'_1 = \beta''_1 = 0$ , il vient

$$x'' \equiv y'' \equiv \beta'' z'' + \beta''' u'' \equiv \beta'' u'' + \beta''' N z'' \equiv 0,$$

donc  $\beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$ ; ainsi on peut faire  $\beta'_1 = \beta''_1 = 0$  toujours et seulement si  $\beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$ .

Supposons d'abord  $\beta''$  ou  $\beta''' \neq 0$ ; en prenant

$$\begin{aligned} \eta = y = x' = y'' = u'' = 0, \quad \xi = x = z' = 1, \\ \beta + \beta'' z + \beta''' u \equiv \beta' + N \beta''' z + \beta'' u \equiv 0, \end{aligned}$$

on peut faire  $\beta_1 = \beta'_1 = 0$ , et le calcul s'achève comme dans la Thèse (p. 94, 95).

Supposons maintenant  $\beta''_1 = \beta'''_1 = \beta'' = \beta''' = 0$  donc  $\beta' \beta'_1 \neq 0$  et

$$\begin{aligned} x'' \equiv y'' \equiv 0, \quad \xi \equiv xz'' + yu'', \quad \eta \equiv xu'' + Nyz'', \\ (\xi^2 - N\eta^2)(Nz''^2 - u''^2)(x^2 - Ny^2) \neq 0, \\ \xi + \beta_1 \omega \eta \equiv x, \quad \eta + \beta_1 \omega N \xi \equiv \beta x + \beta' y, \\ \beta'_1 \eta \equiv N^2 y, \quad \beta'_1 \xi \equiv \beta N y + \beta' x. \end{aligned}$$

L'élimination de  $\xi, \eta$  puis de  $x, y$  entre les quatre dernières équations donne

$$(b) \quad N(\beta' \beta_1^2 - \beta^2 \beta'_1) + (N^2 - \beta' \beta'_1)(\beta'_1 - \beta') \equiv 0.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que  $(\beta_1, \beta'_1)$  fournisse le même type de G que  $(\beta, \beta')$ .

Considérée comme une équation en  $\beta'_1$ , l'équation (b) a des solutions rationnelles toujours et seulement si

$$(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 + 4N\beta'^2(\beta'_1 - N)$$

est carré ou  $\equiv 0$ . On pourra donc faire  $\beta_1 = 0$  toujours et seulement si  $(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2$  que l'on peut écrire

$$[(\beta' + N)^2 - N\beta^2][(\beta' - N)^2 - N\beta^2]$$

est carré ou  $\equiv 0$ .

Supposons d'abord cette condition remplie et soit  $\beta_1 = \beta = 0$ , la condition (b) qui devient  $(\beta'_1 - \beta')(\beta' \beta'_1 - N^2) \equiv 0$  montre qu'il y a pour G  $\frac{p+1}{2}$  types qui, en prenant pour N une racine primitive  $i$  de  $p$ , correspondent à (Cf. Thèse, p. 94)

$$\beta = 0, \quad \beta' = i, i^2, \dots, i^{\frac{p+1}{2}}, \quad \beta'' = \beta''' = 0.$$

Supposons maintenant  $(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2$  non carré, donc  $\beta \beta_1 \neq 0$ , les types distincts de G correspondent aux systèmes  $(\beta, \beta')$  vérifiant cette condition et tels que

$$N(\beta'_h \beta_k^2 - \beta_h^2 \beta'_k) + (N^2 - \beta'_h \beta'_k)(\beta'_k - \beta'_h) \neq 0, \quad h \neq k.$$

Pour trouver le nombre des types de G, cherchons d'abord le

nombre des systèmes  $(\beta_1, \beta'_1)$  solutions de (b). En posant

$$x = \beta'_1 - \frac{\beta'^2 - N\beta^2 + N^2}{2\beta'}, \quad y = \beta_1,$$

(b) devient

$$x^2 - Ny^2 \equiv \frac{1}{4\beta'^2} [(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2]$$

et l'on sait <sup>(1)</sup> que cette équation admet  $p + 1$  systèmes de solutions. Cherchons ensuite le nombre des systèmes  $(\beta, \beta')$  tels que  $(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2$  soit non carré, c'est-à-dire tels que  $\left(\frac{\beta'^2 - N\beta^2 + N^2}{2N\beta'}\right)^2$  soit précédé d'un non carré. L'équation

$$\beta'^2 - N\beta^2 - 2cN\beta' + N^2 = 0,$$

où  $c^2 - 1$  désigne un non carré et qui, en posant

$$x = \beta' - cN, \quad y = \beta,$$

devient

$$x^2 - Ny^2 \equiv N^2(c^2 - 1),$$

a comme précédemment  $p + 1$  systèmes de solutions pour une valeur donnée de  $c$ . Comme  $c^2 - 1$  parcourt <sup>(2)</sup>  $\frac{1}{4}(p + \varepsilon - 2)$  ( $\varepsilon$  désignant le caractère quadratique de  $-1$ ) valeurs distinctes auxquelles il faut ajouter la valeur  $-1$  si  $\varepsilon = -1$ , il en résulte que  $c$  parcourt toujours  $\frac{p-1}{2}$  valeurs distinctes. Les  $\frac{p^2-1}{2}$  systèmes  $(\beta, \beta')$  que nous avons à considérer se répartissant en catégories de  $p + 1$  qui fournissent pour  $G$  le même type, il y a exactement pour  $G$   $\frac{p-1}{2}$  types distincts.

Dans la liste des  $g_p$  (Thèse, p. 164) il faut donc supprimer dans les types (27) celui qui correspond à  $\beta' = 0$  et ajouter les  $\frac{p-1}{2}$  types pour lesquels les seconds membres des équations sont

$$1, \quad 1, \quad b\beta^h a, \quad b\beta^h, \quad 1, \quad 1, \quad c, \quad ca, \quad cb, \quad db^N, \quad da, \quad e,$$

<sup>(1)</sup> DE SÉQUIER, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, n° 44.

<sup>(2)</sup> Il y a  $\frac{1}{4}(p + \varepsilon - 2)$  non carrés  $\neq 0$  suivis d'un carré  $\neq 0$  (DE SÉQUIER, *loc. cit.*).

$\beta_h$  et  $\beta'_h$  parcourant pour  $h = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$  les  $\frac{1}{2}(p-1)$  systèmes de valeurs telles que l'on ait

$$\begin{aligned} & (\beta_h^2 N \beta_h^2 + N^2)^2 - 4 N^2 \beta_h'^2 \quad \text{non carré,} \\ & N(\beta_h \beta_k^2 - \beta_h^2 \beta_k') + (N^2 - \beta_h \beta_k')(\beta_k' - \beta_h') \neq 0 \text{ pour } h \neq k \\ & \left( h, k = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2} \right). \end{aligned}$$

---