BULLETIN DE LA S. M. F.

G. REMOUNDOS

Sur les zéros d’une classe de fonctions transcendantes

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 44-50.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__44_0>

SUR LES ZÉROS D'UNE CLASSE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES;

Par M. Georges Remoundos.

1. M. P. Painlevé, dans son Cours à l'École normale supérieure sur les fonctions abéliennes, a signalé comme vraisemblable une proposition, qui est une extension aux fonctions non uniformes du célèbre théorème de M. E. Picard, sur les valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé (¹).

J'ai confirmé, dans certains cas intéressants, l'idée de l'éminent géomètre par une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 20 avril 1903 (²).

J'espère que prochainement j'établirai cette extension dans le cas le plus général, à l'aide des intégrales abéliennes et en suivant une marche analogue à celle qui a permis à M. Picard d'établir son théorème.

Je me propose de développer ici la Note citée en indiquant en même temps comment ces considérations se rattachent à un théorème plus général, concernant les zéros d'une classe très étendue de fonctions ayant une infinité de branches.

2. Considérons l'équation

$$(1)\qquad F(z,u) = \sigma_0(u) + \sigma_1(u)A_1(z) + \sigma^2(u)A_2(z) + \ldots + \sigma_\nu(u)A_\nu(z) = 0,$$

où $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_n(z)$ désignent des fonctions transcendantes entières de *genre fini* et $\sigma_0(u), \sigma_1(u), \ldots, \sigma_\nu(u)$ des fonctions entières de u absolument quelconques.

Considérons pour le moment u comme paramètre, et appelons valeurs *exceptionnelles* de u celles pour lesquelles $F(z, u)$ admet un nombre fini de zéros.

S'il y a des valeurs de u pour lesquelles $F(z, u)$ soit une constante, ces valeurs sont toutes exceptionnelles; une telle valeur est l'infini (³); cette valeur exceptée, toutes les autres annulent à la

---

(¹) Voir *Traité d'Analyse*, t. III, p. 346.

(²) Je prie le lecteur de combiner la lecture de cette Note avec celle du présent Mémoire. Pour abréger, je la désignerai par la lettre (N).

(³) $F(x, \infty)$ n'est pas une constante, si tous ces $\sigma_i(u)$ ne sont pas des polynomes; cependant, l'infini est toujours une valeur exceptionnelle.

fois $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\ldots$, $\sigma_\nu(u)$ (sinon on pourrait abaisser ν).

Pour abréger le langage, j'appellerai (E) leur ensemble.

Soient α_1, α_2, ..., α_ν, $\alpha_{\nu+1}$, $\nu+1$, valeurs exceptionnelles ne faisant pas partie de (E). D'après les hypothèses $F(z\alpha_1)$, $F(z\alpha_2)$, $\ldots$, $F(z\alpha_\nu)$ et $F(z\alpha_{\nu+1})$ seront des fonctions entières de genre fini n'ayant qu'un nombre fini de zéros et peuvent, par conséquent, se mettre sous la forme [1]

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} F(z,\alpha_1) = P_1(z)e^{Q_1(z)}, & F(z,\alpha_2) = P_2(z)e^{Q_2(z)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F(z,\alpha_\nu) = P_\nu(z)e^{Q_\nu(z)}, & F(z,\alpha_{\nu+1}) = P_{\nu+1}(z)e^{Q_{\nu+1}(z)}. \end{array}\right.$$

Posons

$$\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu) = \begin{vmatrix} \sigma_1(\omega_1) & \sigma_2(\omega_1) & \ldots & \sigma_\nu(\omega_1)\\ \sigma_1(\omega_2) & \sigma_2(\omega_2) & \ldots & \sigma_\nu(\omega_2)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \sigma_\nu(\omega_\nu) & \sigma_2(\omega_\nu) & \ldots & \sigma_\nu(\omega_\nu) \end{vmatrix} = [\sigma_1(\omega_k), \sigma_2(\omega_k), \ldots, \sigma_\nu(\omega_k)]$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots, \nu).$$

Je démontrerai que les nombres α_1, α_2, ..., α_ν, $\alpha_{\nu+1}$ pris ν à ν doivent vérifier l'équation

$$(3)\qquad \varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu) = 0,$$

c'est-à-dire que ν quelconques de ces nombres doivent constituer une solution de cette équation.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, l'élimination de $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_\nu(z)$ (qui serait possible) entre les équations (2) nous conduirait à la relation suivante :

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu+1})P_1 e^{Q_1} - \varphi(\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu+1})P_2 e^{Q_2} + \ldots\\ \quad + (-1)^{k+1}\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{\nu+1})P_k e^{Q_k} + \ldots\\ \qquad\qquad + \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)P_{\nu+1} e^{Q_{\nu+1}} = C, \end{array}\right.$$

où C est une certaine constante.

Or, cette relation est impossible, à moins que toutes ces quan-

---

[1] *Voir* É. Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 56.

tités $\varphi(\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{\nu+1})$, $\varphi(\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{\nu+1})$, $\ldots$, $\varphi(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu)$ ne soient nulles ([1]).

M. Borel a fait une étude approfondie des relations de la forme (4) beaucoup plus générales que celle-ci et démontré leur impossibilité, à l'aide de la théorie de la croissance des fonctions entières, dans son important Mémoire. J'y renvoie le lecteur et je crois inutile de répéter ici la démonstration, qui est fort simple dans le cas qui nous occupe, car une dérivation de la relation (4) nous conduit immédiatement à une relation de la même forme, ayant une exponentielle de moins.

Je dois remarquer que j'ai supposé que $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_\nu(z)$, sont des transcendantes distinctes, c'est-à-dire qu'il n'y a pas entre elles de relations linéaires avec des polynomes comme coefficients.

Cette hypothèse, qui ne diminue pas la généralité de la question, entraîne le fait qu'aucun des $Q(z)$ n'est une constante.

En désignant par (E) l'ensemble des racines de l'équation, chacune étant accompagnée par ses valeurs équivalentes,

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}, \omega) = 0, \tag{5}$$

on a le théorème suivant :

I. *La fonction $u(z)$ à un nombre infini de branches, définie par l'équation* (1), *prend dans le domaine de l'infini toutes les valeurs, sauf, peut-être, un ensemble dénombrable qui fait partie de l'ensemble* (E).

Ce théorème s'applique dans le cas où le nombre des valeurs exceptionnelles non équivalentes dépasse ν, c'est-à-dire le nombre des transcendantes distinctes qui figurent dans $F(z, u)$.

3. Je dois ajouter que l'on arriverait aux mêmes résultats si l'on supposait que $\sigma_0(n)$, $\sigma_1(u)$, $\ldots$, $\sigma_\nu(u)$ sont des fonctions uniformes quelconques, n'ayant que des points singuliers essen-

---

([1]) *Voir* É. Borel, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta Mathematica*, t. XX, p. 385). Nous supposons ici que, parmi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}$, il n'y a pas deux valeurs équivalentes. Deux valeurs α_1 et α'_1 seront dites *équivalentes* lorsque le rapport $F(z, \alpha_1) : F(z, \alpha'_1)$ est une fonction rationnelle. Si α_1 est exceptionnel, α'_1 l'est aussi.

tiels isolés; alors les points limites de l'ensemble (E) seraient parmi ces points singuliers essentiels, qui pourraient être aussi des valeurs exceptionnelles.

Dans les cas où les $\sigma(u)$ admettent des lignes singulières essentielles, il pourrait se faire que l'infini fût un point d'indétermination incomplète de la fonction $u(z)$, d'après la terminologie de M. Painlevé (1), c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs exceptionnelles fût continu, une aire, par exemple.

4. Passons maintenant au cas, qui a fait l'objet de la Note (N), et qui présente le plus grand intérêt; c'est le cas où $F(z, u)$ est un polynome, par rapport à u. Soit

$$(6) \quad f(z, u) = a^{\nu} + A_1(z) u^{\nu+1} + A_2(2) u^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu-1}(z) u + A_{\nu}(z) = 0.$$

Ici, on voit tout de suite que la fonction $\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\nu})$ est toujours différente de zéro, lorsque les valeurs des $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\nu}$ sont distinctes et n'appartiennent pas à (E).

Quant aux valeurs (E), elles n'existent que dans le cas où le nombre des transcendantes distinctes qui figurent dans $f(z, u)$ est moindre que son degré ν, et sont au plus ν, l'infini compris. Elles sont d'une nature tout à fait différente des autres, car elles ne dépendent pas du tout des coefficients $A(z)$; elles seraient toujours exceptionnelles, quelles que soient les fonctions $A(z)$, pourvu que la forme de l'équation $f(z, u) = 0$ reste la même. Nous pouvons les appeler valeurs exceptionnelles *formelles*.

On en déduit immédiatement les théorèmes énoncés dans la Note (N).

Je n'ai pas cherché à reconnaître si le théorème (I) nous permet de trouver des fonctions à un nombre infini de branches définies par (1) et pour lesquelles le nombre des valeurs exceptionnelles soit limité, au plus égal à $\nu + 1$, l'infini compris.

5. Appelons *genre* de la fonction à ν branches définie par l'équation (6) le plus grand des genres de ses coefficients $A_1(z)$, $A_2(z), \ldots, A_{\nu}(z)$.

---

(1) *Sur les singularités des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions définies par les équations différentielles* (*Comptes rendus*, t. CXXXI, 1900).

On donnerait une pareille définition de son ordre. L'ordre ainsi défini reste invariable quand on effectue sur u une transformation homographique.

En effet, en posant

$$u = \frac{au_1 + b}{cu_1 + d} \qquad (ad - bc \neq 0),$$

on trouve une équation de la forme

$$(7) \qquad u_1^\nu + a_1(z) u_1^{\nu-1} + a_2(z) u_1^{\nu-2} + \ldots + a_{\nu-1}(z) u_1 + a_\nu(z) = 0.$$

dans laquelle les $a(z)$ désignent des fonctions méromorphes dont l'ordre est au plus égal à g (1), si g est le plus grand des ordres des A (z). La transformation homographique ne peut donc élever l'ordre. Elle ne peut non plus l'abaisser, car alors la transformation inverse, qui est de même nature, l'élèverait. Les résultats récents de MM. Boutroux et Lindelöf ne nous permettent pas de dire la même chose pour le genre.

On voit que la définition que je donne ici est en parfait accord avec celle du genre ou de l'ordre des fonctions méromorphes donnée par M. Borel.

6. M. E. Maillet, dans son important Mémoire *Sur les fonctions entières* (Journal de M. Jordan, fascicule IV, 1902), appelle *fonctions quasi entières et quasi méromorphes* les fonctions de la forme

$$(8) \qquad f(z) = \varphi_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right) + \varphi_2\left(\frac{1}{z - a_2}\right) + \ldots + \varphi_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right),$$

où $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ désignent des fonctions entières ou méromorphes et définit l'ordre d'une telle fonction dans le voisinage de chacun des points singuliers essentiels. Il démontre que $f(z)$ peut se mettre sous la forme d'un produit

$$(9) \qquad f(z) = \psi_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right), \psi_2\left(\frac{1}{z - a_2}\right), \ldots, \psi_\nu\left(\frac{1}{z - a_\nu}\right),$$

où $\psi_1(t), \ldots, \psi_\nu(t)$ sont aussi des fonctions entières ou méromorphes.

(1) *Voir* Émile Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 62.

Cette propriété nous permet d'étendre facilement au cas où les $A(z)$ sont des fonctions quasi entières ou quasi méromorphes toutes les propositions que je viens de démontrer ici.

7. Convenons d'appeler fonction *algébroïde* toute fonction à un nombre fini de branches, définie par une équation telle que (6), où les $A(z)$ sont des fonctions entières ou méromorphes. On définirait de la même façon les fonctions *quasi algébroïdes*.

J'ai donc démontré le théorème suivant :

II. *Toute fonction transcendante algébroïde ou quasi algébroïde à* ν *branches et de genre fini prend dans le domaine de l'infini toutes les valeurs, sauf* 2ν *au plus. Si le nombre des valeurs exceptionnelles est supérieur à* 2ν, *la fonction* $u(z)$ *est algébrique.*

8. En terminant, je dois observer que l'on pourrait généraliser tous les théorèmes précédents en utilisant les relations exponentielles, dont l'impossibilité est démontrée par M. Borel dans son Mémoire déjà cité des *Acta mathematica* (¹).

Observation. — Le théorème (I) suppose explicitement que toùs les $A(z)$ sont des transcendantes. Le cas contraire nécessite une discussion spéciale que je ferai dans un autre travail.

Ici j'observe que, pour certaines valeurs exceptionnelles, le nombre des exponentielles, qui figurent dans le premier membre de la relation (4) peut bien se réduire. Cela arrive dans les cas où, parmi les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu+1}$, il y a des valeurs équivalentes

Il n'y a que le second membre qui ne subira aucune réduction. Il est aisé de voir qu'il est égal à $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \alpha_{\nu+1})$, avec

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}) = \begin{vmatrix} \sigma_0(\alpha_1) & \sigma_0(\alpha_2) & \ldots & \sigma_0(\alpha_\nu) & \sigma_0(\alpha_{\nu+1}) \\ \sigma_1(\alpha_1) & \sigma_1(\alpha_2) & \ldots & \sigma_1(\alpha_\nu) & \sigma_1(\alpha_{\nu+1}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \sigma_\nu(\alpha_1) & \sigma_\nu(\alpha_2) & \ldots & \sigma_\nu(\alpha_\nu) & \sigma_\nu(\alpha_{\nu+1}) \end{vmatrix}.$$

En appliquant donc toujours la proposition fondamentale de

(¹) Au moment de la correction des épreuves, nous ajoutons que ce théorème de M. Borel va assez loin pour nous affranchir de toute restriction sur le genre des $A_i(z)$.

M. Borel (Mémoire cité), si l'on veut, par suite, tenir compte de toutes les valeurs exceptionnelles, on doit exprimer le théorème en question par la seule condition

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}) = 0.$$

Ainsi, $\nu + 1$ valeurs exceptionnelles autres que (E) doivent satisfaire à cette relation.