BULLETIN DE LA S. M. F.

L. LECORNU

Sur l'herpolhodie

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 40-41.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__40_0>

SUR L'HERPOLHODIE;

Par M. L. Lecornu.

L'absence de points d'inflexion dans l'herpolhodie s'établit aisément de la manière suivante :

Soient A, B, C les moments d'inertie principaux du solide relativement à son point fixe $O(A > B > C)$; h, la constante des forces vives; k, l'axe résultant des moments des quantités de mouvement. L'équation, par rapport aux directions principales, du cône décrit par l'axe instantané est

$$A(k^2 - Ah)x^2 + B(k^2 - Bh)y^2 + C(k^2 - Ch)z^2 = 0.$$

Le vecteur OE ayant pour composantes

$$\lambda = A(k^2 - Ah)p, \qquad \mu = B(k^2 - Bh)q, \qquad \nu = C(k^2 - Ch)r$$

est normal au cône, pour la génératrice $\frac{x}{p}, \frac{y}{q}, \frac{z}{r}$ coïncidant avec l'axe instantané. Cherchons la vitesse absolue de l'extrémité E de ce vecteur. La vitesse relative aux axes mobiles a pour projection sur Ox

$$A(k^2 - Ah)\frac{dp}{dt} = (k^2 - Ah)(B - C)qr.$$

La vitesse d'entraînement a pour projection sur la même direction

$$q\nu - r\mu = [C(k^2 - Ch) - B(k^2 - Bh)]qr.$$

La vitesse absolue a pour projection la somme des deux précédentes, c'est-à-dire

$$(B - C)(B + C - A)hqr.$$

Le vecteur OE est également normal au cône de sommet O contenant l'herpolhodie. Si celle-ci présentait une inflexion, la direction de OE serait momentanément stationnaire et, par suite, la vitesse absolue de E aurait la direction de OE; d'où les relations :

$$\frac{Ap^2(k^2 - Ah)}{(B - C)(B + C - A)} = \frac{Bq^2(k^2 - Bh)}{(C - A)(C + A - B)} = \frac{Cr^2(k^2 - Ch)}{(A - B)(A + B - C)}.$$

Or on sait que $B + C - A$, $A + B - C$, $k^2 - Ch$ sont positifs, tandis que $k^2 - Ah$ est négatif. On arrive donc à une impossibilité, qui démontre la proposition.

L'absence de rebroussements s'établit plus facilement encore. Pour qu'il y ait rebroussement il faut que la vitesse angulaire de OE soit infinie : car, en excluant le cas particulier où la rotation s'effectue autour d'un axe principal et où l'herpolhodie se réduit, comme l'on sait, à un point, le chemin élémentaire parcouru par le pôle sur cette courbe est toujours du même ordre que dt. Comme la vitesse de E est finie, il faut que OE soit nul; d'où

$$(k^2 - Ah)p = 0, \qquad (k^2 - Bh)q = 0, \qquad (k^2 - Ch)r = 0.$$

Deux au moins des binomes $k^2 - Ah$, $k^2 - Bh$, $k^2 - Ch$ étant différents de zéro, il faut que deux des composantes p, q, r de la rotation soient nulles, c'est-à-dire que, contrairement à l'hypothèse, la rotation s'effectue autour de l'une des directions principales. La conclusion est que, pour une herpolhodie non réduite à un point, il ne peut y avoir de rebroussements.