BULLETIN DE LA S. M. F.

G. REMOUNDOS

Sur les trajectoires auxquelles donnent lieu les forces centrales

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 255-259.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__255_1>

SUR LES TRAJECTOIRES AUXQUELLES DONNENT LIEU LES FORCES CENTRALES;

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

1. Un point mobile, sollicité par une force centrale, peut décrire une trajectoire ayant la propriété intéressante de s'approcher indéfiniment du centre des forces, qui est alors un point asymptote de la trajectoire; c'est là une condition nécessaire pour que le point attiré tende à se choquer avec le point attirant.

Si nous tenons compte de la formule

$$\rho = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2 r}{d\theta^2}}, \tag{1}$$

nous voyons que le rayon de courbure ρ tend vers zéro, lorsque le rayon polaire r tend vers zéro, pourvu que $\tan g\,\omega$ ne tende pas vers zéro avec r, ω désignant l'angle formé par le rayon polaire et la tangente de la courbe; si, en effet, il en est ainsi, la formule

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\operatorname{tang}\omega}$$

montre que la dérivée $\frac{dr}{d\theta}$ tend vers zéro avec le rayon r; il en résulte, en vertu de la formule (1), que le rayon de courbure ρ tend aussi vers zéro avec r. Nous supposons, bien entendu, ici, que la trajectoire ne passe pas par le pôle (centre de force), qui n'est qu'un point asymptote de la courbe.

Dans ce travail, nous allons envisager d'abord ces trajectoires se rapprochant indéfiniment du centre d'attraction, avec l'hypothèse que le rayon de courbure tende vers zéro avec r; ensuite, nous exposerons quelques résultats concernant le rayon de courbure des trajectoires auxquelles donnent lieu des forces centrales données comme fonctions de la distance du mobile au centre des forces.

2. Nous nous posons le problème suivant :

Quelles sont les lois de forces centrales qui peuvent donner lieu à des trajectoires du genre indiqué dans le paragraphe précédent?

Ces trajectoires sont caractérisées par le fait que le centre de force est un point asymptote de ces courbes, le rayon de courbure ρ tendant vers zéro en même temps que le rayon polaire r.

Pour traiter ce problème nous allons utiliser deux formules indiquées par les mathématiciens Resal (*Comptes rendus*, t. XC, p. 769) et Siacci (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII), savoir :

$$F = -\frac{m}{K}\frac{v^3 r}{\rho}, \qquad F = -mK^2\frac{r}{\rho p^3}, \tag{2}$$

m désignant la masse, K la constante des aires, v la vitesse, r le rayon polaire, ρ le rayon de courbure, p la distance du centre de la force à la tangente de la trajectoire et F l'intensité de la force; la deuxième formule n'est qu'une conséquence immédiate de la première et de la formule classique $pv = K$.

La relation évidente [1]

$$p = r\sin\omega$$

nous permet d'écrire la formule (2) comme suit :

$$F = -mK^2\frac{1}{\rho r^2 \sin^3\omega}. \tag{3}$$

Nous allons nous borner au cas où la force F dépend de la seule

(1) Dans cette formule, l'angle ω est choisi inférieur à deux angles droits.

distance du mobile au centre de force et nous remarquerons que la formule (3) nous permet de conclure que les lois de forces centrales, fonctions de la seule distance r du mobile au centre, qui répondent au problème ci-dessus posé, sont de la forme suivante :

$$F = \frac{-m\mu}{r^n} \qquad (n > 2),$$

l'exposant n étant plus grand que deux.

Citons comme exemple la spirale logarithmique

$$r = e^{\mu\theta},$$

qui admet le pôle comme point asymptote et que décrit un mobile sollicité par une force centrale dont l'expression est

$$F = -m(1 + \mu^2)K^2 \frac{1}{r^3},$$

m désignant la masse et K la constante des aires. Cette trajectoire correspond aux conditions initiales

$$\theta_0 = 0, \qquad r_0 = 1, \qquad v_0 = K\sqrt{1 + \mu^2}.$$

Le rayon de courbure ρ tend, en effet, vers zéro, lorsque le point de la courbe s'approche indéfiniment du point asymptote, qui coïncide ici avec le centre de force.

3. D'une façon générale, si la force centrale est donnée par la formule

$$F = \frac{\alpha}{r^q},$$

α étant une constante, nous aurons, pour le rayon de courbure d'une trajectoire quelconque, la formule suivante :

$$\rho = \lambda \frac{r^{q-2}}{\sin^3 \omega},$$

λ désignant une constante et ω l'angle défini au n° 2. Nous en déduisons l'inégalité

$$\rho \geqq |\lambda| \, r^{q-2}, \tag{4}$$

le symbole $|\lambda|$ désignant la valeur absolue de la constante λ.

Cette inégalité nous conduit à plusieurs corollaires :

a. Si $q > 2$, le rayon ρ de courbure tend vers l'infini lorsque r croît indéfiniment sur une branche infinie, s'il en existe.

b. Si $q < 2$, le rayon de courbure ρ tend vers l'infini, lorsque la distance polaire r tend vers zéro sur une branche de la trajectoire s'approchant indéfiniment du centre de la force, s'il existe une telle branche.

En ce qui concerne la détermination de la constante λ, elle se fait immédiatement par les formules du paragraphe précédent; nous avons

$$\lambda = -\frac{m\mathrm{K}^2}{\alpha},$$

et nous voyons qu'elle s'exprime au moyen de la masse du point mobile, de la constante des aires et du coefficient d'attraction α.

Si nous supposons que, sur une trajectoire, la vitesse reste inférieure à une certaine limite b, la formule

$$pv = \mathrm{K}$$

nous permet d'établir aussi une limite supérieure du rayon de courbure de la trajectoire; nous avons en effet, d'une part,

$$p > \frac{\mathrm{K}}{b}, \qquad \frac{1}{p^3} < \frac{b^3}{\mathrm{K}^3},$$

et, d'autre part,

$$\rho = -\frac{m\mathrm{K}^2}{\alpha}\frac{r^{q+1}}{p^3};$$

d'où résulte

$$\rho < \left|\frac{m\mathrm{K}^2}{\alpha}\right|\frac{b^3}{\mathrm{K}^3}r^{q+1},$$

ou encore

$$(5) \qquad \rho < \left|\frac{mb^3}{\alpha\mathrm{K}}\right|r^{q+1}, \qquad \rho < \mathrm{L}r^{q+1}, \qquad \mathrm{L} = \left|\frac{mb^3}{\alpha\mathrm{K}}\right|.$$

Les inégalités (4) et (5) présentent un intérêt particulier pour les trajectoires ayant des points à l'infini ou des branches s'approchant indéfiniment du centre d'attraction, puisqu'elles nous renseignent sur la manière dont le rayon de courbure ρ varie avec r

sur une branche allant à l'infini ou sur une branche s'approchant indéfiniment du centre d'attraction.

L'existence de trajectoires ayant des branches non fermées est assurée dans les cas $q \neq 2$ et $q \neq -1$ par un célèbre théorème de Bertrand, d'après lequel les seules lois de force qui donnent lieu à des trajectoires fermées, quelles que soient les conditions initiales, correspondent aux valeurs $q = 2$ et $q = -1$.

Les inégalités

$$|\lambda| r^{q-2} \leqq \rho < L r^{q+1}$$

fournissent, en général, des limites d'une précision remarquable pour la grandeur du rayon de courbure d'une trajectoire et, en particulier, pour l'ordre d'infinitude et l'ordre infinitésimal dans les cas où le rayon de courbure tend vers l'infini ou vers zéro sur des branches allant à l'infini ou s'approchant indéfiniment du centre de force.