BULLETIN DE LA S. M. F.

J. LE ROUX

Sur les caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles

Bulletin de la S. M. F., tome 36 (1908), p. 129-133.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__129_0>

SUR LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. J. Le Roux.

1. Pour exprimer qu'un système d'équations linéaires est incompatible ou indéterminé, il suffit d'écrire que les équations homogènes, obtenues en négligeant dans ce système les termes indépendants des inconnues, admettent des solutions non nulles.

Cette remarque si simple et si évidente permet de former les équations caractéristiques des systèmes généraux d'équations aux dérivées partielles.

Considérons un système S quelconque, à n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et p fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Nous supposerons simplement que le système ait été mis sous forme complètement intégrable par des différentiations et des éliminations successives.

Si les équations ne sont pas linéaires par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé r_i de chacune des fonctions inconnues u_i, nous raisonnerons sur le système auxiliaire de M. Darboux, qui présente, au point de vue de l'indétermination, les mêmes caractères que le système S, et qui est toujours linéaire et homogène.

Pour déterminer les valeurs que prennent en un point les fonctions u et leurs dérivées, il faut joindre aux équations du système S les équations additionnelles qui se déduisent de la considération des fonctions initiales.

Supposons qu'on ait calculé pour u_1 toutes les dérivées d'ordre inférieur à r_1, pour u_2 les dérivées d'ordre inférieur à r_2, etc. Il s'agit de calculer les dérivées des ordres $r_1, r_2, \ldots$ des fonctions $u_1, u_2, \ldots$.

Les équations additionnelles peuvent se mettre sous une forme que nous allons indiquer, en supposant d'abord que les fonctions initiales soient des fonctions arbitrairement données sur une variété A à $n-1$ dimensions.

Soit v_i une dérivée d'ordre $r_i - 1$ de la fonction u_i. On formera la différentielle

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial v_i}{\partial x_n} dx_n.$$

Cette différentielle a, au point considéré, une valeur déterminée quand $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ sont les composantes d'un déplacement infinitésimal sur la variété A, c'est-à-dire quand on a entre les quantités dx_i une relation de la forme

$$h_1\,dx_1 + h_2\,dx_2 + \ldots + h_n\,dx_n = 0. \tag{1}$$

Si les équations ainsi formées, jointes à celles qu'on déduit du système (S), constituent un système incompatible ou indéterminé, les équations linéaires et homogènes

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial v_i}{\partial x_n}dx_n = 0, \tag{2}$$

dans lesquelles les coefficients dx_i sont liés par la relation (1), admettent des solutions non nulles, et ces solutions vérifient les équations linéaires et homogènes qu'on déduit du système (S) quand on y néglige les termes qui ne contiennent pas les dérivées de l'ordre le plus élevé de chacune des fonctions inconnues.

Observons maintenant que les premiers membres des équations (1) et (2) linéaires et homogènes par rapport aux différentielles dx_k s'annulent pour les mêmes valeurs de ces différentielles. Nous pouvons en conclure que les coefficients sont proportionnels.

La différentielle $d^{r_i}u_i$ qu'on formerait avec les valeurs des dérivées satisfaisant aux équations de la forme (2) se réduirait donc, à un facteur près, à une puissance du premier membre de l'équation (1) :

$$d^{r_i}u_i = \lambda_i(h_1\,dx_1 + h_2\,dx_2 + \ldots + h_n\,dx_n)^{r_i}. \tag{3}$$

Remplaçons dans les équations du système (S), réduites, comme nous l'avons indiqué, à leurs termes de l'ordre le plus élevé, les dérivées d'ordre r_i de u_i par les valeurs qu'on déduit des identités (3). Les résultats obtenus sont linéaires et homogènes par rapport aux multiplicateurs λ_i.

L'élimination des multiplicateurs n'est pas toujours possible dans les systèmes où il existe plusieurs fonctions inconnues. Quand elle est possible, elle donne les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients $h_1, h_2, \ldots, h_n$ de l'équation (1) pour que le problème de Cauchy se présente sous forme indéterminée. Ce sont les *équations caractéristiques*.

On verra facilement que la méthode de M. Hadamard [1], quand elle est applicable, donne exactement les mêmes résultats.

2. Appliquons notre méthode aux équations de la déformation des surfaces, exemple traité par M. Hadamard. Le système à résoudre, prolongé jusqu'au second ordre pour le ramener à la forme complètement intégrable, est de la forme

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=\mathrm{E},\\
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=\mathrm{F},\\
&\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=\mathrm{G},\\
&\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u},\\
&\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v},\\
&\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u},\\
&\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v},\\
&\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u},\\
&\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v},\\
&\sum\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right]=\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial v^2}.
\end{aligned}\right.$$

Le calcul des dérivées premières ne donne pas d'équations caractéristiques; celui des dérivées secondes conduit, après l'élimination des multiplicateurs, à l'équation caractéristique

$$(5)\quad \begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & k^2\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+h^2\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-2hk\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\\
\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & k^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+h^2\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}-2hk\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\\
\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & k^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+h^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2hk\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}
\end{vmatrix}=0,$$

[1] HADAMARD, *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXIV, p. 48.

en supposant l'équation entre les différentielles du et dv, analogue à l'équation (1), mise sous la forme

$$h\,du + k\,dv = 0. \tag{6}$$

L'élimination de h et k entre les deux équations (5) et (6) donne immédiatement l'équation des lignes asymptotiques sous la forme habituelle.

3. Les équations caractéristiques en h_1, h_2, ... peuvent être considérées comme définissant tangentiellement des variétés algébriques dans l'espace à n dimensions homogènes. Les méthodes ordinaires permettent de passer des équations tangentielles aux équations ponctuelles, homogènes par rapport aux différentielles dx_1, dx_2, ... Ces équations aux différentielles sont vérifiées par les *bicaractéristiques* de M. Hadamard.

Dans le cas des équations aux dérivées partielles linéaires, les équations caractéristiques exprimées en variables tangentielles peuvent être assimilées à des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Il serait intéressant d'examiner si ces équations forment un système intégrable. Le fait est assez vraisemblable, si l'on réfléchit au rôle que jouent dans l'intégration d'une équation unique les intégrales complètes de l'équation caractéristique [1].

4. Il existe une généralisation immédiate des équations caractéristiques, à laquelle on se trouve conduit en supposant que les fonctions initiales soient données sur des variétés à moins de $n-1$ dimensions.

Les différentielles dx_i sont alors liées par plusieurs relations de la forme (1). Supposons qu'il en existe k :

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad P_k = 0,$$

en posant

$$P_j = h_{1,j}\,dx_1 + h_{2,j}\,dx_2 + \ldots + h_{n,j}\,dx_n.$$

Un raisonnement semblable à celui dont nous avons fait usage dans le premier cas nous montre que la différentielle $d^{r_i}u_i$ est

[1] Voir *Journal de Math.*, 5e série, t. VI, p. 387.

alors une fonction homogène d'ordre r_i des formes $P_1, P_2, \ldots, P_k$. L'élimination des coefficients de ces formes, si elle est possible, donnera les équations caractéristiques généralisées.

On peut avoir encore à considérer des cas où les fonctions initiales seraient définies d'une manière différente pour chaque fonction inconnue. Notre méthode s'appliquerait aussi à ces cas très généraux.