

BULLETIN DE LA S. M. F.

A. MALUSKI

Sur la continuité des racines d'une équation algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 32-37.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__32_0

© Bulletin de la S. M. F., 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONTINUITÉ DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÈBRIQUE;

PAR M. ARTHUR MALUSKI.

Tout revient à démontrer le théorème suivant :

Soit l'équation algébrique

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m = 0;$$

quel que soit le nombre positif A, on peut lui faire correspondre un nombre positif ε tel que, si les rapports

$$\frac{a_m}{a_{m-p}}, \frac{a_{m-1}}{a_{m-p}}, \dots, \frac{a_{m-p+1}}{a_{m-p}}$$

sont inférieurs à ε en valeur absolue, l'équation proposée admet p racines dont les valeurs absolues sont supérieures à A.

J'appelle ici *valeur absolue* du nombre $z = x + iy$ le nombre $+\sqrt{x^2 + y^2}$ et je poserai, pour abrégé,

$$z' = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont, en valeur absolue, inférieures au nombre positif α_1 , la valeur absolue de la somme des produits p à p de ces racines est moindre que $C_m^p \alpha_1^p$, en sorte qu'on a

$$\frac{\alpha'_{m-p}}{\alpha'_m} < C_m^p \alpha_1^p.$$

Par conséquent, dès l'instant où l'on a

$$\frac{\alpha'_m}{\alpha'_{m-p}} < \frac{1}{C_m^p \alpha_1^p},$$

l'équation $f(x) = 0$ admet certainement une racine x_1 telle que $x'_1 > \alpha_1$.

Cette conclusion subsiste même si

$$\frac{\alpha'_m}{\alpha'_{m-p}} = \frac{1}{C_m^p \alpha_1^p},$$

à condition que $\pm \alpha_1$ ne soit pas racine de $f(x) = 0$.

1. Posons

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{C_m^p \alpha_1^p}$$

et supposons que tous les rapports

$$\frac{\alpha'_m}{\alpha'_{m-p}}, \frac{\alpha'_{m-1}}{\alpha'_{m-p}}, \dots, \frac{\alpha'_{m-p+1}}{\alpha'_{m-p}}$$

soient inférieurs à ε_1 .

Divisons le polynôme $f(x)$ par $1 - \frac{x}{x_1}$; désignons le quotient par $f_1(x)$; $f_1(x)$ est un polynôme entier en x de degré $m - 1$, que nous pouvons représenter par

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{m-1} x^{m-1}.$$

Un calcul facile donne

$$b_0 = a_0,$$

$$b_1 = a_1 + \frac{a_0}{x_1},$$

.....,

$$b_{m-p} = a_{m-p} + \frac{a_{m-p-1}}{x_1} + \dots + \frac{a_0}{x_1^{m-p}},$$

.....,

$$b_{m-1} = a_{m-1} + \frac{a_{m-2}}{x_1} + \dots + \frac{a_{m-p+1}}{x_1^{p-1}} + \frac{a_{m-p}}{x_1^p} + \dots + \frac{a_0}{x_1^{m-1}}.$$

En tenant compte de l'expression de b_{m-p} , on voit immédiatement qu'on peut écrire

$$b_{m-p+1} = a_{m-p+1} + \frac{1}{x_1} b_{m-p},$$

$$b_{m-p+2} = a_{m-p+2} + \frac{1}{x_1} a_{m-p+1} + \frac{1}{x_1^2} b_{m-p},$$

.....,

$$b_{m-1} = a_{m-1} + \frac{1}{x_1} a_{m-2} + \dots + \frac{1}{x_1^{p-2}} a_{m-p+1} + \frac{1}{x_1^{p-1}} b_{m-p}.$$

Considérons le rapport $\frac{b'_{m-1}}{b'_{m-p}}$ et cherchons-en une limite supé-

Tous les nombres qui constituent les seconds membres des inégalités précédentes sont inférieurs au dernier d'entre eux qui, lui-même, est manifestement inférieur à $\frac{2}{\alpha_1}$, car, si l'on remplace ϵ_1 par sa valeur et si l'on remarque que le nombre $\alpha_1 - N - 1$ est au moins égal à 1 en vertu des hypothèses, on a sûrement

$$\frac{\epsilon_1 \alpha_1}{\alpha_1 - N - 1} < \frac{1}{\alpha_1},$$

pourvu que $p > 1$. Or, ce calcul est sans objet lorsque $p = 1$.

2. Déterminons maintenant le nombre positif α_2 par la condition

$$\frac{2}{\alpha_1} = \frac{1}{C_{m-1}^{p-1} \alpha_2^{p-1}}$$

et posons

$$\frac{2}{\alpha_1} = \epsilon_2.$$

On voit, comme précédemment, que tous les rapports

$$\frac{b'_{m-1}}{b'_{m-p}}, \frac{b'_{m-2}}{b'_{m-p}}, \dots, \frac{b'_{m-p+1}}{b'_{m-p}}$$

sont tous inférieurs à ϵ_2 .

Par conséquent, l'équation $f_1(x) = 0$ admet au moins une racine x_2 telle que

$$x_2' > \alpha_2.$$

D'un autre côté, on établit par un calcul analogue au précédent que les rapports

$$\frac{b'_0}{b'_{m-p}}, \frac{b'_1}{b'_{m-p}}, \dots, \frac{b'_{m-p-1}}{b'_{m-p}}$$

sont tous inférieurs à $\frac{N \alpha_1'}{\alpha_1' - N - 1}$ et, par suite, à $2N$, pourvu qu'on suppose

$$\alpha_1 > 2(N + 1),$$

inégalité non contradictoire avec la précédente limite de α_1 .

Divisons à présent le polynome $f_1(x)$ par $1 - \frac{x}{x_2}$ et désignons le quotient par $f_2(x)$; on voit, en raisonnant comme précédem-

ment, que, si α_3 désigne un nombre positif tel que

$$\frac{2}{\alpha_2} = \frac{1}{C_{m-2}^{p-2} \alpha_3^{p-2}},$$

et si l'on pose

$$\epsilon_3 = \frac{2}{\alpha_2},$$

les valeurs absolues des rapports des $p - 2$ coefficients des plus hautes puissances de x du polynome $f_2(x)$ à celui de x^{m-p} sont inférieures à ϵ_3 . Par conséquent, une racine au moins de $f_2(x) = 0$, soit x_3 , satisfait à la condition

$$x_3' > \alpha_3.$$

Si, en outre, on a pu prendre

$$\alpha_2 > 2(2N + 1)$$

ou même, ce qui est plus simple,

$$\alpha_2 > 4(N + 1),$$

les valeurs absolues des rapports des $m - p$ premiers coefficients de $f_2(x)$ au suivant sont inférieures à $4N$.

3. Continuons ainsi jusqu'à ce que nous arrivions au polynome $f_p(x)$.

Nous avons eu à écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_{p-1} &= 2 C_{m-p+1}^1 \alpha_p, \\ \alpha_{p-2} &= 2 C_{m-p+2}^2 (\alpha_{p-1})_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ \alpha_1 &= 2 C_{m-1}^{p-1} (\alpha_2)^{p-1}. \end{aligned}$$

En même temps, nous avons supposé qu'on pouvait prendre

$$\begin{aligned} \alpha_1 &> 2(N + 1), \\ \alpha_2 &> 2^2(N + 1), \\ &\dots\dots\dots, \\ \alpha_p &> 2^p(N + 1). \end{aligned}$$

D'après les égalités précédentes, toutes ces inégalités sont satis-

faites si l'on prend seulement

$$\alpha_p > 2^p(N+1).$$

On prendra ensuite

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{C_m^p \alpha_1^p}.$$

Alors, si α_p vérifiant la condition précédente, on a de plus

$$\alpha_p > A,$$

A étant un nombre positif donné à l'avance aussi grand qu'on veut, on voit que les p nombres x'_1, x'_2, \dots, x'_p sont tous supérieurs à A .

L'équation $f(x) = 0$ admet donc p racines x_1, x_2, \dots, x_p dont les valeurs absolues sont supérieures à A .

Enfin, les valeurs absolues des rapports des $m - p$ premiers coefficients de $f_p(x)$ au dernier sont inférieures à $2^p \times N$, en sorte que, d'après un théorème connu, toutes les racines de l'équation $f_p(x) = 0$ sont, en valeur absolue, inférieures à $2^p \times N + 1$.

Le théorème est complètement démontré.
