L. RAFFY

Généralisation d’une propriété de la sphère

Bulletin de la S. M. F., tome 38 (1910), p. 155-159.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1910__38__155_0>

GÉNÉRALISATION D'UNE PROPRIÉTÉ DE LA SPHÈRE;

PAR M. L. RAFFY.

1. Si x, y, z désignent les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace, on vérifie aisément que toute coordonnée isotrope de ce point peut être mise sous la forme

$$\xi = -l^2(x+iy)+m^2(x-iy)+2lmz, \tag{1}$$

où l et m sont deux constantes. Appliquons ce résultat à la sphère de rayon 1 dont l'équation est

$$a^2+b^2+c^2=1 \tag{2}$$

et pour laquelle on a

$$a+ib=\frac{-2\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \qquad a-ib=\frac{2}{\alpha-\beta}, \qquad c=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}. \tag{3}$$

L'expression précédente devient

$$\xi=\frac{2l^2\alpha\beta+2lm(\alpha+\beta)+2m^2}{\alpha-\beta},$$

ce qu'on peut écrire

$$\xi=\frac{(\lambda\alpha+\mu)(\lambda\beta+\mu)}{\alpha-\beta}, \tag{4}$$

en remplaçant $l\sqrt{2}$ et $m\sqrt{2}$ par λ et μ. Or, l'élément linéaire de la sphère considérée est

$$d\sigma^2=\frac{4\,d\alpha\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2}. \tag{5}$$

On voit que si on le divise par le produit de ξ et d'une autre coordonnée isotrope

$$\xi_1=\frac{(\lambda_1\alpha+\mu_1)(\lambda_1\beta+\mu_1)}{\alpha-\beta},$$

on obtient un produit de deux différentielles exactes

$$\frac{d\sigma^2}{\xi\xi_1}=\frac{4\,d\alpha\,d\beta}{(\lambda\alpha+\mu)(\lambda_1\alpha+\mu_1)(\lambda\beta+\mu)(\lambda_1\beta+\mu_1)}. \tag{6}$$

Cette conclusion subsiste évidemment, quel que soit le système de coordonnées curvilignes auquel la sphère est rapportée. On a donc ce théorème :

L'élément linéaire d'une sphère devient un produit de deux différentielles exactes quand on le divise par le carré d'une coordonnée isotrope quelconque ou par le produit de deux coordonnées isotropes quelconques de cette sphère.

2. Nous allons généraliser cette proposition et *déterminer tous les éléments linéaires qui deviennent des produits de deux différentielles exactes quand on les divise par le carré d'une coordonnée isotrope de l'une des surfaces auxquelles ils appartiennent.* Rapportons ces éléments linéaires aux paramètres des lignes minima ; l'un d'eux sera

$$ds^2 = 4\,\varphi^2(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta. \tag{7}$$

Si ξ est la coordonnée isotrope considérée, l'expression

$$\varphi^2\xi^{-2}\,d\alpha\,d\beta$$

est, par hypothèse, un produit de deux différentielles exactes, c'est-à-dire que le quotient $\varphi : \xi$ est de la forme $A(\alpha)\,B(\beta)$. Mais, en choisissant convenablement les paramètres α et β, on peut prendre $\xi = \varphi$. Or, l'équation d'Ossian Bonnet, à laquelle satisfait toute coordonnée isotrope ξ d'une surface admettant l'élément linéaire (7), n'est autre que

$$(rt - s^2)\varphi - 2rq\,\varphi'_\beta - 2tp\,\varphi'_\alpha + 4pq\,\varphi''_{\alpha\beta} = 0, \tag{8}$$

si l'on pose

$$d\xi = p\,d\alpha + q\,d\beta, \qquad dp = r\,d\alpha = s\,d\beta, \qquad dq = s\,d\alpha + t\,d\beta.$$

Nous avons à écrire que cette équation est vérifiée quand on y remplace φ par ξ : nous obtenons ainsi l'équation du problème

$$(rt - s^2)\xi - 2q^2r - 2p^2t + 4pqs = 0. \tag{9}$$

Avant de l'intégrer, remarquons qu'elle admet comme solution une fonction arbitraire de $\alpha + \beta$, ce qui nous apprend que la propriété considérée appartient à tout élément linéaire de surface de révolution : on vérifie, en effet, très facilement que l'élément linéaire d'une surface de révolution [1] dont la méridienne tourne autour de l'axe des z devient un élément linéaire de développable quand on le divise soit par $(x+iy)^2$, soit par $(x-iy)^2$, soit par x^2+y^2.

3. Pour effectuer l'intégration de l'équation (9), il est commode d'employer la transformation de Legendre, en posant

$$(10)\qquad X = p, \qquad Y = q, \qquad Z = p\alpha + q\beta - \xi,$$

d'où résulte, comme on sait,

$$(11)\qquad \alpha = P, \qquad \beta = Q, \qquad \xi = PX + QY - Z,$$

$$(12)\qquad \frac{r}{T} = \frac{s}{-S} = \frac{t}{R} = \frac{1}{RT - S^2}.$$

L'équation (9) prend alors la forme linéaire

$$(13)\qquad 2RX^2 + 4SXY + 2TY^2 - PX - QY + Z = 0.$$

Les équations des caractéristiques admettant deux combinaisons intégrables, on arrive à l'intégrale intermédiaire

$$(14)\qquad 2(PX + QY) - Z = X\varphi\left(\frac{Y}{X}\right),$$

d'où l'on déduit facilement

$$(15)\qquad Z = X\chi\left(\frac{Y}{X}\right) + \sqrt{X}\,\psi\left(\frac{Y}{X}\right),$$

les deux symboles χ et ψ désignant des fonctions arbitraires. Telle est l'intégrale générale de l'équation transformée (13).

On peut aussi remarquer que cette équation rentre dans le type, étudié par M. Laisant (*Bull. Soc. math. de France*, 1892, p. 117), des équations auxquelles satisfait la somme de plusieurs fonctions homogènes de degrés différents. Si Z est la somme d'une fonction homogène de degré m et d'une fonction homogène de degré n,

---

[1] Pour les surfaces dont l'équation est de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = \chi(x + iy),$$

(surfaces *quasi de révolution* de M. Demoulin) l'élément linéaire devient aussi un produit de deux différentielles, quand on le divise par $(x+iy)^2$.

elle vérifie l'équation

$$(16)\qquad RX^2 + 2SXY + TY^2 - (m+n-1)(PX+QY) + mnZ = 0.$$

En identifiant cette dernière avec notre équation (13), on trouve

$$m = 1, \qquad 2n = 1,$$

ce qui vérifie l'intégrale (15) donnée ci-dessus. Pour exprimer α, β et ξ en X et Y, nous en tirons par différentiation

$$(17)\qquad \alpha = P = \chi + \frac{\psi}{2\sqrt{X}} - \frac{Y\chi'}{X} - \frac{Y\psi'}{X\sqrt{X}}, \qquad \beta = Q = \chi' + \frac{\psi'}{\sqrt{X}};$$

d'où résulte

$$(18)\qquad \xi = PX + QY - Z = -\frac{\sqrt{X}\psi}{2}.$$

Par suite, l'élément linéaire devient

$$ds^2 = 4\varphi^2\, d\alpha\, d\beta = 4\xi^2\, dP\, dQ = X\,\psi^2\left(\frac{Y}{X}\right) dP\, dQ.$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$(19)\qquad \sqrt{X} = \frac{1}{2u}, \qquad \frac{Y}{X} = v.$$

Alors χ et ψ seront des fonctions arbitraires de v, et il viendra

$$(20)\qquad \xi = -\frac{\psi}{4u}, \qquad P = \chi - v\chi' + u(\psi - 2v\psi'), \qquad Q = \chi' + 2u\psi'.$$

On déduit de là

$$(21)\qquad \begin{aligned} \frac{4\,ds^2}{\psi^2} &= 2\,\psi'(\psi - 2v\psi')\frac{du^2}{u^2} \\ &\quad + \left\{2\,u[\psi''(\psi - 4v\psi') - \psi'^2] + \chi''(\psi - 4v\psi')\right\}\frac{du\,dv}{u^2} \\ &\quad - [2u^2\psi''(\psi' + 2v\psi'') + u\,\chi''(\psi' + 4v\psi'') + v\chi''^2]\frac{dv^2}{u^2}. \end{aligned}$$

On voit que cet élément linéaire dépend de deux fonctions arbitraires de v, savoir ψ et χ'', tandis que la coordonnée isotrope ξ dépend seulement de ψ. En conséquence, à tous les éléments linéaires dans lesquels ψ a la même expression correspondent des surfaces qui admettent la même coordonnée isotrope ξ, quelle que soit la fonction arbitraire χ.

Pour donner un exemple de ce fait, prenons

$$\psi(v) = 2\sqrt{v},$$

ce qui donne

$$ds^2 = \frac{v}{u^2}\,dP\,dQ, \qquad P = \chi - v\chi', \qquad Q = \chi' + 2\frac{u}{\sqrt{v}}.$$

De là résulte

$$ds^2 = \frac{4\,dP\,dQ}{(Q-\chi')^2};$$

or, P peut être considérée comme une fonction arbitraire de χ'; on est donc en droit d'écrire, en changeant les notations,

$$ds^2 = \frac{4\,A(\alpha)\,d\alpha\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2}.$$

On reconnaît là l'élément linéaire d'une classe de surfaces réglées à génératrices isotropes, rapportées à leurs lignes minima (*voir* mon *Étude sur les surfaces imaginaires de Monge à lignes de courbure confondues*, publiée en 1908 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*).

Ces surfaces jouissent donc de la propriété que *leur élément linéaire devient celui d'une développable quand on le divise par le carré d'une de leurs coordonnées isotropes.*

Revenant aux notations primitives et remplaçant $v\chi''$ par $-V$, on obtient l'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{V[2v\,du - (V+u)\,dv]\,dv}{u^2\sqrt{v}},$$

et l'on voit que, quelle que soit la fonction arbitraire V, on peut prendre

$$\xi = -\frac{\sqrt{v}}{2u}$$

pour expression d'une coordonnée isotrope d'une surface qui admettra cet élément linéaire et sera déterminée par trois quadratures de différentielles exactes.