BULLETIN DE LA S. M. F.

L. ZORRETTI

Sur les équations du mouvement non stationnaire d’un fluide visqueux

Bulletin de la S. M. F., tome 38 (1910), p. 258-260.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1910__38__258_0>

SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT NON STATIONNAIRE D'UN FLUIDE VISQUEUX;

PAR M. L. ZORETTI.

Pour l'intégration des équations du mouvement stationnaire d'un fluide visqueux

$$\Delta u = \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \Delta v = \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \Delta w = \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial z},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

on peut, comme on sait, procéder de la façon suivante : déterminer quatre fonctions harmoniques φ, ξ, η, ζ, telles que

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

puis déterminer trois fonctions U, V, W, telles que

$$\Delta U = -\xi, \qquad \Delta V = -\eta, \qquad \Delta W = -\zeta,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0;$$

on aura alors pour les vitesses

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},$$
$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},$$
$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Je me propose d'indiquer une marche analogue dans le cas d'un mouvement non stationnaire.

Les équations à intégrer sont :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k}{\rho}\Delta u = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{k}{\rho}\Delta v = 0, \\ &\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{k}{\rho}\Delta w = 0; \end{aligned} \right.$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Substituons aux trois fonctions u, v, w les quatre nouvelles fonctions φ, U, V, W de x, y, z et t qui vérifient les équations

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},$$
$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},$$
$$w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}.$$

L'équation de continuité donne immédiatement $\Delta\varphi = 0$ (l'opérateur Δ s'appliquant naturellement aux trois variables x, y, z et non à t). La première des équations (1) devient

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{k}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial y}\Delta W - \frac{\partial}{\partial z}\Delta V\right) = 0.$$

Posons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho}p = P;$$

l'équation précédente s'écrira alors

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{k}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial y}\Delta W - \frac{\partial}{\partial z}\Delta V\right) = 0.$$

Adjoignons à cette équation les deux analogues et éliminons P; nous aurons trois équations en U, V, W, dont voici l'une :

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{k}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\Delta W - \frac{\partial}{\partial z}\Delta V\right)$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) - \frac{k}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\Delta U - \frac{\partial}{\partial x}\Delta W\right).$$

On peut encore l'écrire ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}\right)$$
$$= \frac{k}{\rho}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Delta W - \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\Delta V - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\Delta U\right].$$

Posons

$$\Delta U = -\xi, \qquad \Delta V = -\eta, \qquad \Delta W = -\zeta,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = I;$$

l'équation précédente devient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\zeta-\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial z}\right)=\frac{k}{\rho}\left[-\Delta\zeta+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right].$$

Remarquons alors que

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=-\Delta\mathrm{I};$$

l'équation précédente peut, par suite, s'écrire

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial^2 \mathrm{I}}{\partial z\,\partial t}=\frac{k}{\rho}\left(\Delta\zeta+\frac{\partial}{\partial z}\Delta\mathrm{I}\right)$$

ou encore

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\frac{k}{\rho}\Delta\zeta+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t}-\frac{k}{\rho}\Delta\mathrm{I}\right)=0.$$

Nous avons le droit de poser

$$\frac{k}{\rho}\Delta\mathrm{I}-\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t}=0,$$

équation en I seul. Alors ξ, η, ζ devront satisfaire aux équations analogues

$$\frac{k}{\rho}\Delta\xi-\frac{\partial\xi}{\partial t}=0,\qquad \frac{k}{\rho}\Delta\eta-\frac{\partial\eta}{\partial t}=0,\qquad \frac{k}{\rho}\Delta\zeta-\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0.$$

On aura ensuite, pour déterminer U, V, W, à intégrer le système

$$\Delta\mathrm{U}=-\xi,\qquad \Delta\mathrm{V}=-\eta,\qquad \Delta\mathrm{W}=-\zeta,$$
$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}=\mathrm{I}.$$

D'où, enfin, les expressions de u, v, w.