

# BULLETIN DE LA S. M. F.

L. ZORRETTI

## **Sur les équations du mouvement non stationnaire d'un fluide visqueux**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 38 (1910), p. 258-260.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1910\\_\\_38\\_\\_258\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1910__38__258_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT NON STATIONNAIRE  
D'UN FLUIDE VISQUEUX;**

PAR M. L. ZORETTI.

Pour l'intégration des équations du mouvement stationnaire d'un fluide visqueux

$$\Delta u = \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \Delta v = \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \Delta w = \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

on peut, comme on sait, procéder de la façon suivante : déterminer quatre fonctions harmoniques  $\varphi$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , telles que

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

puis déterminer trois fonctions  $U$ ,  $V$ ,  $W$ , telles que

$$\Delta U = -\xi, \quad \Delta V = -\eta, \quad \Delta W = -\zeta,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0;$$

on aura alors pour les vitesses

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Je me propose d'indiquer une marche analogue dans le cas d'un mouvement non stationnaire.

Les équations à intégrer sont :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k}{\rho} \Delta u = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{k}{\rho} \Delta v = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{k}{\rho} \Delta w = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

Substituons aux trois fonctions  $u, v, w$  les quatre nouvelles fonctions  $\varphi, U, V, W$  de  $x, y, z$  et  $t$  qui vérifient les équations

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned}$$

L'équation de continuité donne immédiatement  $\Delta \varphi = 0$  (l'opérateur  $\Delta$  s'appliquant naturellement aux trois variables  $x, y, z$  et non à  $t$ ). La première des équations (1) devient

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{k}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial y} \Delta W - \frac{\partial}{\partial z} \Delta V \right) = 0.$$

Posons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} p = P;$$

l'équation précédente s'écrira alors

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{k}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial y} \Delta W - \frac{\partial}{\partial z} \Delta V \right) = 0.$$

Adjoignons à cette équation les deux analogues et éliminons  $P$ ; nous aurons trois équations en  $U, V, W$ , dont voici l'une :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \Delta W - \frac{\partial}{\partial z} \Delta V \right) \\ = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial z} \Delta U - \frac{\partial}{\partial x} \Delta W \right). \end{aligned}$$

On peut encore l'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right) \\ = \frac{k}{\rho} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta W - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \Delta V - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \Delta U \right]. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \Delta U = -\xi, \quad \Delta V = -\eta, \quad \Delta W = -\zeta, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = I; \end{aligned}$$

l'équation précédente devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\zeta - \frac{\partial I}{\partial z} \right) = \frac{k}{\rho} \left[ -\Delta \zeta + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right].$$

Remarquons alors que

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\Delta I;$$

l'équation précédente peut, par suite, s'écrire

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial^2 I}{\partial z \partial t} = \frac{k}{\rho} \left( \Delta \zeta + \frac{\partial}{\partial z} \Delta I \right)$$

ou encore

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{k}{\rho} \Delta \zeta + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial I}{\partial t} - \frac{k}{\rho} \Delta I \right) = 0.$$

Nous avons le droit de poser

$$\frac{k}{\rho} \Delta I - \frac{\partial I}{\partial t} = 0,$$

équation en I seul. Alors  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  devront satisfaire aux équations analogues

$$\frac{k}{\rho} \Delta \xi - \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0, \quad \frac{k}{\rho} \Delta \eta - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad \frac{k}{\rho} \Delta \zeta - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0.$$

On aura ensuite, pour déterminer U, V, W, à intégrer le système

$$\begin{aligned} \Delta U &= -\xi, & \Delta V &= -\eta, & \Delta W &= -\zeta, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} &= I. \end{aligned}$$

D'où, enfin, les expressions de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

---