BULLETIN DE LA S. M. F.

J. CHAZY

Sur une équations différentielle du premier ordre et du premier degré

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 129-134.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__129_1>

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ;

Par M. Jean Chazy.

On a souvent donné des cas d'intégrabilité de l'équation

$$\frac{dv}{du} = A(u)v^3 + B(u)v^2 + C(u)v + D(u), \tag{1}$$

où A, B, C, D désignent des fonctions de u; je voudrais en indiquer de nouveaux.

L'équation (1) conserve la même forme par le changement de variable et de fonction

$$[u, v; \varphi(u), \lambda(u)v + \mu(u)], \tag{2}$$

quelles que soient les fonctions φ, λ, μ. On peut profiter de l'indétermination de ces fonctions pour simplifier l'équation (1).

Ainsi, si l'on veut mettre l'équation (1) sous la forme

$$\frac{dv}{du} = v^3 + D(u) \tag{3}$$

par une transformation de la forme (2), les coefficients φ, λ, μ sont déterminés en fonction des coefficients de l'équation donnée par des quadratures. M. Appell ([1]) a intégré l'équation (3) pour des valeurs simples de la fonction $D(u)$.

M. Appell a encore considéré la forme ([2])

$$\frac{dv}{du} = A(u)v^3 + B(u)v^2; \tag{4}$$

pour mettre l'équation (1) sous la forme (4), par une transformation de la forme (2), il faut connaître une intégrale particulière de l'équation (1), et une intégrale particulière d'une équation de Riccati formée avec cette première intégrale particulière et avec les coefficients de l'équation (1).

Parmi les équations de la forme (4), M. R. Liouville a considéré l'équation ([3])

$$\frac{dv}{du} + (\alpha u^3 + 3\beta u^2 + 3\gamma u + \delta)v^3 + 3(\varepsilon u + \varphi)v^2 = 0, \tag{5}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ désignent des constantes. L'équation (5) conserve la même forme par le changement de variable et de fonction $(u, v; \lambda u + \mu, \rho v)$, λ, μ, ρ désignant des constantes arbitraires, de sorte qu'elle ne dépend que de trois paramètres. M. R. Liouville a montré que l'intégration de l'équation (5) se ramène à une quadrature, quand les coefficients satisfont aux deux conditions

$$\alpha\varphi - \beta\varepsilon = 0, \qquad \varepsilon^2(\delta\varepsilon - \gamma\varphi) + 2\alpha\varphi^3 = 0,$$

et par suite ne dépendent plus que d'un paramètre. En négligeant des cas d'intégrabilité banaux, on peut alors réduire l'équation à la forme

$$\frac{dv}{du} + (\alpha u^3 + 3u)v^3 + 3uv^2 = 0,$$

([1]) *Journal de Liouville*, 1889, p. 366.

([2]) *Ibid.*, p. 378.

([3]) *Journal de l'École Polytechnique*, LXII^e Cahier.

α désignant un paramètre arbitraire. Et la quadrature à laquelle se ramène l'intégration de cette dernière équation est elliptique ou hyperelliptique, si l'équation algébrique en r

$$\alpha(r-2)^2 - 9r = 0$$

a une racine commensurable.

Dans l'étude des équations à points critiques fixes du troisième ordre, j'ai été conduit à déterminer les équations de la forme [1]

$$y''' = ayy'' + by'^2 + cy^2y' + dy^4, \tag{6}$$

a, b, c, d désignant quatre constantes, dont l'intégrale générale est uniforme. Or l'équation (6) ne change pas par le groupe de transformations à deux paramètres $\left(x, y; \lambda x + \mu, \frac{y}{\lambda}\right)$, de sorte que l'intégration de cette équation se ramène à l'intégration d'une équation du premier ordre suivie de deux quadratures. Effectivement les deux fonctions u et v définies par les équations

$$y' = uy^2, \qquad du = vuy\,dy \tag{7}$$

ne changent pas le groupe de transformations précédent et sont liées par l'équation du premier ordre

$$\frac{dv}{du} = [6u^3 - (2a+b)u^2 - cu - d]v^3 + (7u - a)v^2. \tag{8}$$

Cette équation est de la forme (5).

A chacune des équations (6) dont l'intégrale générale est uniforme et que j'ai intégrées, correspond une équation (8), qui est intégrée par là même : la variable et la fonction u et v sont exprimées par les équations (7) en fonctions uniformes du paramètre $\lambda x + \mu$ et d'une constante d'intégration. Mais je veux considérer ici seulement deux équations de la forme (6) qui renferment un paramètre arbitraire, et qui, quelle que soit la valeur de ce paramètre, se ramènent à une équation linéaire du second ordre : il en est par conséquent de même des équations (8) correspondantes. En outre, quand le paramètre a des valeurs numériques entières, l'intégrale générale de chacune de ces deux

[1] *Acta mathematica*, 1911.

équations (6) est uniforme, et s'exprime par des combinaisons de fonctions connues. A un double point de vue, l'intégration des deux équations (8) correspondantes est donc analogue à l'intégration de l'équation de M. R. Liouville.

En premier lieu considérons l'équation

$$(9) \qquad y''' = 2yy'' + 2y'^2 + \frac{24}{1-k^2}(y' - y^2)^2.$$

Cette équation peut être remplacée par le système

$$y' = y^2 + \frac{1-k^2}{4} z, \qquad z'' = 6z^2,$$

ou encore, puisque l'intégrale générale de la dernière équation est $z = p\,(x + \mathrm{A};\ 0,\ \mathrm{B})$, par le système

$$y = -\frac{t'}{t}, \qquad t'' = \frac{k^2-1}{4} p(x + \mathrm{A};\ 0,\ \mathrm{B})t.$$

L'intégration de l'équation (9) et, par suite, celle de l'équation du premier ordre

$$\frac{dv}{du} = \left[6u^3 - 6u^2 - \frac{24}{1-k^2}(u-1)^2\right] v^3 + (7u-2)v^2$$

se ramènent donc, quel que soit le paramètre k, à l'intégration d'une équation linéaire du second ordre.

D'ailleurs, par une transformation linéaire effectuée sur x, on peut donner aux deux constantes A et B les valeurs 0 et 1, sans altérer les fonctions u et v; et, si t et t_1 désignent deux intégrales particulières de l'équation linéaire du second ordre, l'intégrale générale est $\mathrm{C}t + \mathrm{D}t_1$: donc la fonction y et, par suite, les fonctions u et v sont rationnelles par rapport à la troisième constante d'intégration.

Si le paramètre k est un nombre entier impair plus grand que 1, l'équation linéaire du second ordre est une équation de Lamé; l'intégrale générale $y(x)$ et, par suite, les fonctions $u(x)$, $v(x)$ s'expriment par les fonctions p, ζ, σ. Si le paramètre k est un nombre entier positif et pair, mais non multiple de 6, l'intégrale générale de l'équation linéaire du second ordre n'est pas uniforme, mais le quotient de deux intégrales quelconques est uniforme;

l'intégrale générale $y(x)$ et les fonctions $u(x)$, $v(x)$ s'expriment encore, mais algébriquement, par les fonctions p, ζ, σ.

Considérons en second lieu l'équation

$$(10) \qquad y''' = 2yy'' - 3y'^2 + \frac{4}{36-k^2}(6y' - y^2)^2,$$

qui peut être remplacée par le système

$$(11) \qquad \begin{gathered} t(1-t)\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{6}t\right)\frac{dz}{dt} - \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{k^2}\right)\frac{z}{4} = 0, \\ t(1-t)\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{6}t\right)\frac{dz_1}{dt} - \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{k^2}\right)\frac{z_1}{4} = 0, \\ \frac{z_1(t)}{z(t)} = x, \qquad y(x) = \frac{6dz}{z\,dx}. \end{gathered}$$

L'intégration de l'équation (10) et, par suite, celle de l'équation du premier ordre

$$(12) \qquad \frac{dv}{du} = \left[6u^3 - u^2 - \frac{4}{36-k^2}(6u-1)^2\right]v^3 + (7u-2)v^2$$

se ramènent donc à l'intégration d'une équation linéaire du second ordre suivie d'une inversion.

Cette équation linéaire du second ordre est de la forme hypergéométrique. Si le paramètre k est l'un des nombres entiers 2, 3, 4, 5, le groupe de l'équation est le groupe du dièdre d'angle $\frac{2\pi}{3}$, du tétraèdre, de l'octaèdre ou de l'icosaèdre; la fonction $[z(x)]^{\frac{12}{k-6}}$ est un polynome, et la fonction $y(x)$ est rationnelle. Dans l'équation (12), la variable et la fonction sont exprimées en fonctions rationnelles du paramètre x et de la constante d'intégration.

Si le paramètre k est un nombre entier plus grand que 6, ou s'il est infini, la fonction $t(x)$ est une fonction de Schwarz dont le triangle fondamental a comme angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{k}$: la fonction $y(x)$ admet la même coupure circulaire ou rectiligne que la fonction $t(x)$. Si k est infini, les deux fonctions $t(x)$ et $y(x)$ sont holomorphes dans la région où elles sont définies; si k est un entier plus grand que 6, la fonction $t(x)$ admet des pôles d'ordre k, et la fonction $y(x)$ admet les mêmes points comme pôles simples.

D'ailleurs l'expression générale $t(x)$ définie par le système différentiel précédent est $t\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right)$, A, B, C, D désignant quatre constantes arbitraires, et de même l'expression générale de la fonction $y(x)$ est

$$\frac{AD-BC}{(Cx+D)^2}\,y\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right)-\frac{6C}{Cx+D}.$$

Donc, dans l'équation (12), la variable u et la fonction v sont des fonctions uniformes du paramètre x et de la constante d'intégration, qui admettent dans le plan de chacune de ces variables une coupure circulaire ou rectiligne.

Enfin, si le paramètre k a une valeur quelconque différente des quatre nombres $0, \pm 6, \infty$, la fonction $U(x)=z^{\frac{12}{k-6}}$, considérée comme homogène de degré $\frac{12}{6-k}$ par rapport à la variable x et à une variable d'homogénéité x_1, satisfait à l'équation aux dérivées partielles remarquable

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}\frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4}-4\frac{\partial^4 U}{\partial x^3\,\partial x_1}\frac{\partial^4 U}{\partial x\,\partial x_1^3}+3\left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\,\partial x_1^2}\right)^2=0.$$

Par conséquent, de l'intégration de l'équation hypergéométrique (11) on déduit encore l'intégrale homogène de cette équation aux dérivées partielles, pour un degré d'homogénéité quelconque différent de 0, 1 et 2.