

# BULLETIN DE LA S. M. F.

E. BLUTEL

## Sur une méthode d'approximation

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 39 (1911), p. 155-159.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1911\\_\\_39\\_\\_155\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__155_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE MÉTHODE D'APPROXIMATION;

PAR M. E. BLUTEL.

Soit  $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$  un polynome entier donné à coefficients complexes et à variable complexe. Pour toute valeur de  $z$  dont l'affixe est un point intérieur à un contour donné  $C$ , les polynomes  $f(z)$ ,  $\frac{1}{1} f'(z)$ ,  $\frac{1}{1.2} f''(z)$ , ...,  $\frac{1}{n!} f^{(n)}(z)$ , ont des modules limités supérieurement; soit  $l$  une limite supérieure commune à ces différents modules.

Si l'on pose  $z = z_0 + u$ ,  $z_0$  ayant pour affixe un point quelconque  $A_0$ , intérieur à  $C$ ,

$$f(z_0 + u) = f(z_0) + u \frac{f'(z_0)}{1} + u^2 \frac{f''(z_0)}{1.2} + \dots + u^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

est un polynome entier en  $u$ , dont les coefficients ont des modules moindres que  $l$ .

Posons en général :

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \alpha_0^{(k)} e^{i\theta_0^{(k)}};$$

tous les nombres  $\alpha_0^{(k)}$  sont inférieurs à  $l$ .

Soit  $A_0$  un point quelconque du plan, tel que  $f(z_0)$  et  $f'(z_0)$  ne soient nuls ni l'un ni l'autre. Prenons comme contour  $C$  un cercle dont le centre est  $A_0$  et tel que, pour tout point extérieur à  $C$ , le module de  $f(z)$  soit supérieur au module  $\alpha_0$  de  $f(z_0)$ ; on sait toujours déterminer un tel cercle et un nombre  $l$  correspondant. Tout point  $A$  donnant à  $f(z)$  un module inférieur à  $\alpha_0$  est donc intérieur à  $C$ .

Cherchons, dans le voisinage de  $A_0$ , un point  $A_1$  d'affixe

$$z_1 = z_0 + u_1,$$

donnant à  $f(z)$  un module  $\alpha_1$  moindre que  $\alpha_0$ . Si nous posons,

$$u = \rho e^{i\omega},$$

nous obtenons :

$$f(z) = \alpha_0 e^{i\theta_0} + \alpha'_0 \rho e^{i(\theta'_0 + \omega)} + \alpha''_0 \rho^2 e^{i(\theta''_0 + 2\omega)} + \dots + \alpha_0^{(n)} \rho^n e^{i(\theta_0^{(n)} + n\omega)},$$

d'où :

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= [\alpha_0 \cos \theta_0 + \alpha'_0 \rho \cos(\theta'_0 + \omega) \\ &\quad + \alpha''_0 \rho^2 \cos(\theta''_0 + 2\omega) + \dots + \alpha_0^{(n)} \rho^n \cos(\theta_0^{(n)} + n\omega)]^2 \\ &\quad + [\alpha_0 \sin \theta_0 + \alpha'_0 \rho \sin(\theta'_0 + \omega) + \dots + \alpha_0^{(n)} \rho^n \sin(\theta_0^{(n)} + n\omega)]^2 \\ &= z_0^2 + 2\alpha_0 \alpha'_0 \rho \cos(\theta'_0 - \theta_0 + \omega) \\ &\quad + [2\alpha_0 \alpha''_0 \cos(\theta''_0 - \theta_0 + 2\omega) + \alpha_0'^2] \rho^2 \\ &\quad + [2\alpha_0 \alpha_0''' \cos(\theta_0''' - \theta_0 + 3\omega) \\ &\quad + 2\alpha'_0 \alpha_0'' \cos(\theta_0'' - \theta'_0 + \omega)] \rho^3 + \dots + \alpha_0^{(n)2} \rho^{2n}. \end{aligned}$$

Quelle que soit la valeur attribuée à  $\omega$ , les coefficients de  $\rho^2$ ,  $\rho^3$ , ...,  $\rho^{2n}$ , dans ce polynome sont limités supérieurement par  $2\alpha_0 \alpha_0'' + \alpha_0'^2$ ,  $2\alpha_0 \alpha_0''' + 2\alpha'_0 \alpha_0''$ , ...,  $\alpha_0^{(n)2}$ , et, *a fortiori*, par  $3l^2$ ,  $4l^2$ ,  $5l^2$ , ...,  $l^2$ . Il est facile de voir que le plus grand de ces derniers nombres vaut  $(n+1)l^2 = L$ .

On peut donc affirmer qu'on a

$$|f(z)|^2 < z_0^2 + 2\alpha_0 \alpha'_0 \rho \cos(\theta'_0 - \theta_0 + \omega) + L(\rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^{2n}),$$

quel que soit  $u$ .

Supposons  $\rho < 1$ ; alors  $\rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^{2n}$  est moindre que  $\frac{\rho^2}{1-\rho}$ , de sorte que

$$|f(z)|^2 < z_0^2 + 2\alpha_0 \alpha'_0 \rho \cos(\theta'_0 - \theta_0 + \omega) + \frac{\rho^2 L}{1-\rho}.$$

En particulier, prenons  $\frac{\rho_1 L}{1 - \rho_1} = \alpha_0 \alpha'_0$ , d'où

$$\rho_1 = \frac{\alpha_0 \alpha'_0}{L + \alpha_0 \alpha'_0} < 1,$$

et  $\omega = \omega_1 = \theta_0 - \theta'_0 + \pi$ . Alors  $u_1 = \rho_1 e^{i\omega_1}$ , et

$$|f(z_1)|^2 < \alpha_0^2 - \alpha_0 \alpha'_0 \rho_1 = \left(\alpha_0 - \frac{\alpha'_0 \rho_1}{2}\right)^2 - \frac{\alpha_0'^2 \rho_1^2}{4} < \left(\alpha_0 - \frac{\alpha'_0 \rho_1}{2}\right)^2.$$

Représentons par  $\alpha_1$  et  $\alpha'_1$  les modules de  $f(z_1)$  et de  $f'(z_1)$ ; nous pouvons écrire

$$\alpha_1^2 < \left(\alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha'_0 \rho_1\right)^2$$

et, par suite,

$$\alpha_1 < \alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha'_0 \rho_1,$$

car le second membre est positif, puisque  $\alpha_0 - \alpha'_0 \rho_1$  l'est.

Le point  $A_1$  ainsi obtenu est intérieur à  $C$  puisque  $\alpha_1 < \alpha_0$ ; si  $\alpha_1$  et  $\alpha'_1$  ne sont nuls ni l'un ni l'autre, nous pourrons répéter le raisonnement et déterminer un point  $A_2$  dont l'affixe  $z_2 = z_1 + u_2$  est définie par les équations

$$u_2 = \rho_2 e^{i\omega_2}, \quad \rho_2 = \frac{\alpha_1 \alpha'_1}{L + \alpha_1 \alpha'_1}, \quad \omega_2 = \theta_1 - \theta'_1 + \pi.$$

Ce point  $A_2$  donnera à  $f(z)$  un module  $\alpha_2$  tel que

$$\alpha_2 < \alpha_1 - \frac{1}{2} \alpha'_1 \rho_2$$

et sera encore intérieur à  $C$ .

On pourra recommencer si  $\alpha_2 \alpha'_2$  n'est pas nul. On sera conduit de la sorte à un point zéro de  $f(z)$  ou de  $f'(z)$ , ou bien on pourra répéter la transformation indéfiniment, en utilisant toujours le même nombre  $L$ , puisque les points successifs  $A_0, A_1, \dots, A_p$  sont toujours intérieurs à  $C$ .

Ajoutons les inégalités

$$\alpha_1 < \alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha'_0 \rho_1, \quad \dots, \quad \alpha_{p+1} < \alpha_p - \frac{1}{2} \alpha'_p \rho_{p+1},$$

nous obtenons

$$2(\alpha_0 - \alpha_{p+1}) > \alpha'_0 \rho_1 + \alpha'_1 \rho_2 + \dots + \alpha'_p \rho_{p+1},$$

et nous concluons que la série, dont le terme général est  $\alpha'_p \rho_{p+1}$ , est convergente, de sorte que le produit  $\frac{\alpha_p \alpha_p'^2}{L + \alpha_p \alpha_p'}$  tend vers zéro. Comme le dénominateur de cette fraction est inférieur à

$$(n + 2) l^2,$$

le numérateur tend vers zéro, ainsi que le produit  $\alpha_p \alpha_p'$ . En même temps,  $\rho_{p+1}$  tend vers zéro.

Soient  $M_1, M_2, \dots, M_n$  les points zéros de  $f(z)$  et  $M'_1, M'_2, \dots, M'_{n-1}$  ceux de  $f'(z)$ . Le produit des distances du point  $A_p$  à ces différents points tend vers zéro en même temps que la distance  $A_p A_{p+1}$ ; le point  $A_p$  a donc pour position limite un des points zéros de  $f(z)$  ou de  $f'(z)$ . Cela démontre également la convergence de la série  $z_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_p + \dots$ , dont la somme est l'affixe du point limite.

On peut appliquer ce raisonnement à la démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques entières. Admettons que tout polynome entier, à coefficients complexes de degré moindre que  $n$ , possède au moins un zéro complexe, et par suite en possède un nombre égal à son degré (zéros distincts ou non). Proposons-nous de démontrer que tout polynome entier  $f(z)$  de degré  $n$  admet au moins un zéro. Parmi les points zéros de  $f'(z)$  distinguons celui qui fait acquérir à  $f(z)$  le plus petit module; soit  $M'_1$  ce point et soit  $\beta$  le module non nul qu'il donne à  $f(z)$ . On sait qu'on peut déterminer au voisinage de  $M'_1$  un point  $A_0$  donnant à  $f(z)$  un module  $\alpha_0$  moindre que  $\beta$ . Prenons ce point  $A_0$  comme point de départ et effectuons la transformation indiquée plus haut; les modules  $\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_p$ , acquis par  $f'(z)$  au cours de ces opérations, sont limités inférieurement, si grand que soit  $p$ , par un nombre positif, sans quoi le produit des distances du point  $A_p$  à l'un des points  $M'_1, M'_2, \dots, M'_{n-1}$  pourrait devenir moindre que tout nombre positif, ce qui est contraire au fait que  $\alpha_p$  est moindre que  $\alpha_0$ . Par suite, ou bien les opérations conduiront à un point  $A_p$  tel que  $\alpha_p = 0$ , c'est-à-dire qu'on tombera sur un zéro de  $f(z)$ , ou bien elles se continueront indéfiniment de telle sorte que  $\alpha_p$  tende vers zéro. De plus, la convergence de la série, dont le terme général est  $\alpha'_p \rho_{p+1}$ , entraîne celle de la série dont le terme général est  $\rho_p$ .

La série  $z_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_p + \dots$  est donc absolument convergente; soit B le point affixe de sa somme  $\zeta$ . Le point  $A_p$  a pour limite B et comme  $f(z_p)$  tend vers zéro, c'est que

$$f(\zeta) = 0.$$

---