

# BULLETIN DE LA S. M. F.

A. PELLET

## **Des systèmes infinis d'équations**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 41 (1913), p. 119-126.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1913\\_\\_41\\_\\_119\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__119_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DES SYSTÈMES INFINIS D'ÉQUATIONS;

PAR M. A. PELLET.

1. Soient les équations

$$(1) \quad x_p^{m_p} - f_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n),$$

les  $f_p$  étant des fonctions holomorphes; désignons par  $F_p$  une fonction majorante de  $f_p$  et considérons leurs  $n$  équations majorantes

$$(2) \quad X_p^{m_p} - F_p(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0,$$

$m$  étant le plus grand des nombres  $m_p$  et  $F(X)$  une fonction majorante des  $n$  fonctions

$$X^{m-m_p} F_p(X, X, \dots, X),$$

où le facteur de  $X^{m-m_p}$  n'est autre que  $F_p(X_1, X_2, \dots, X_n)$  dans laquelle on a remplacé  $X_1, X_2, \dots, X_n$  par  $X$ ; les valeurs positives de  $X$  qui rendent positive la fonction

$$X^m - F(X)$$

rendront aussi positives les premiers membres des  $n$  équations (2). Les équations (1) ont, dans la majorité des cas, un nombre de

systèmes de solutions égal au produit  $m_1 m_2 \dots m_n$ , pour chacun desquels les quantités  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ont des modules inférieurs à  $\xi$ , plus petite racine positive de l'équation  $X^m - F(X) = 0$ , et il n'y en a pas d'autres. Cela se voit immédiatement lorsque  $n - 1$  des nombres  $m_1, m_2, \dots, m_n$  sont égaux à l'unité, ou encore lorsque  $f_p$  ne contient que les  $p$  inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_p$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ). Voir mon Mémoire *Sur les équations majorantes* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1909).

2. Appliquons ceci à l'équation de Fredholm

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s),$$

(Traité de MM. B. Heywood et Fréchet, p. 49).

On est conduit aux  $n$  équations linéaires

$$(3) \quad x_p = \delta \lambda \left[ \sum_{q=2}^{q=n} x_q K(s_p, s_q) \right] + f(s_p),$$

où l'on a posé

$$s_1 = a, \quad s_2 = a + \delta, \quad \dots, \quad s_n = a + (n-1)\delta = b, \quad \delta = \frac{b-a}{n-1}$$

et

$$x_p = \varphi(s_p) \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

dans les équations (3) on doit omettre dans le second membre le terme correspondant à  $q = p$ , lorsque  $K(s, s)$  est infini. Enfin on doit faire tendre  $n$  vers l'infini. Désignons par  $\mu$ , l'intégrale

$$\int_a^b |K(s, t)| dt$$

et soit  $\mu$  son maximum lorsque  $s$  varie entre  $a$  et  $b$ ; par  $\nu$  le maximum du module de  $f(s)$  dans le même intervalle; on est conduit pour  $x_p$  à l'équation majorante

$$X - \lambda \mu X = \nu,$$

qui a une racine positive si  $\lambda \mu < 1$ ; on suppose  $\lambda$  paramètre positif;

d'où, pour fonction majorante de  $\varphi(s)$ ,

$$|f(s)| + \frac{\lambda\nu}{1-\lambda\mu} \mu s,$$

en développant suivant les puissances croissantes de  $\lambda$ .

Ce résultat se vérifie sur l'exemple de M. Picard (Traité de MM. B. Heywood et Fréchet, p. 81).

Plus généralement soit l'équation (p. 4 du Traité)

$$\varphi(M) - \lambda \int_D K(M, P) \psi[\varphi(P)] d\omega_P = f(M),$$

$\psi(x)$  étant une fonction holomorphe de  $x$  donnée, ayant pour fonction majorante  $\Psi(X)$ . Désignons par  $\mu_M$  l'intégrale

$$\int_D |K(M, P)| d\omega_P = \mu_M,$$

par  $\mu$  sa valeur maximum lorsque  $M$  varie dans le domaine  $D$ , par  $\nu$  le maximum de  $|f(M)|$  dans  $D$ , une équation majorante de  $\varphi(M)$  dans  $D$  est

$$(4) \quad X - \lambda\mu \Psi(X) = \nu$$

et

$$|f(M)| + \mu_M X,$$

une fonction majorante de  $\varphi(M)$ , pour tout point  $M$ ; on peut ordonner  $\varphi(M)$  suivant les puissances croissantes de  $\lambda$  si  $\mu, \nu, \mu_M, f(M)$  sont finies, et le rayon de convergence est au moins égal à la plus petite valeur positive  $\lambda$  pour laquelle l'équation (4) a une racine double.

### 3. Soit l'équation différentielle linéaire

$$(5) \quad \frac{d^m y}{dx^m} - \lambda \left( p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + p_k \frac{d^{m-k} y}{dx^{m-k}} + \dots + p_m y \right) = 0,$$

les coefficients  $p$  étant des fonctions holomorphes de  $e^x$  et  $e^{-x}$ ,

$$p = a_0 + a_1 e^x + a_{-1} e^{-x} + \dots + a_n e^{nx} + a_{-n} e^{-nx} + \dots,$$

toutes convergentes lorsque la partie réelle de  $x$  est comprise entre  $R$  et  $R_1$ ,  $R_1 > R$ . Si l'on remplace  $x$  par  $r + r_1 \sqrt{-1} + x$ ,  $r$  et  $r_1$

étant réels, les coefficients conservent leur forme et sont convergents lorsque la partie réelle de  $x$  est comprise entre  $R - r$  et  $R_1 - r$ , quantités de signes contraires, lorsque  $r$  est compris entre  $R$  et  $R_1$ ; ainsi nous supposons  $R < 0$  et  $R_1 > 0$ . Cherchons à satisfaire à cette équation par une fonction  $y$  de la forme

$$b_0 e^{\rho x} + b_1 e^{(\rho+1)x} + b_1 e^{(\rho-1)x} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} b_n e^{(\rho+n)x},$$

$\rho$  étant un nombre non entier et différent de zéro. Les dérivées de  $y$  seront de la même forme. Nous prendrons pour inconnue

$$y^{(m)} = \frac{d^m y}{dx^m}.$$

On aura

$$y^{(m)} = \sum b_n e^{(\rho+n)x}, \quad y^{(m-k)} = \sum b_n \frac{e^{(\rho+n)x}}{(\rho+n)^k}$$

( $n$  variant entre  $-\infty$  et  $+\infty$ ).

Substituant dans l'équation et ordonnant, les coefficients doivent être tous nuls, ce qui donne une infinité d'équations pour les quantités  $b$ . Si l'on considère l'une d'elles, il y a un seul terme ne s'annulant pas avec  $\lambda$  et formé par l'une des quantités  $b_n$ ; nous désignerons cette équation par l'indice de cette quantité, qui varie d'une équation à l'autre. Supposons pour un moment connus les  $2N + 1$  coefficients  $b_n$  ayant un indice inférieur à  $N$  en valeur absolue. On arrive, pour les équations en nombre infini dont l'indice est en valeur absolue  $\geq N$ , à l'équation majorante

$$B \left[ 1 - \lambda \left( P_1 \frac{1}{N_1} + P_2 \frac{1}{N_2} + \dots + P_m \frac{1}{N_1^m} \right) \right] = Q,$$

où  $N_1$  représente  $N - |\rho|$ ,  $Q$  une fonction linéaire des modules des  $2N + 1$  quantités  $b_n$ , pour  $|n| < N$ , les coefficients tendant vers zéro lorsque  $N$  tend vers l'infini;  $P_k$  la somme des modules des termes de la série  $p_k$ , pour  $x = 0$ , série qui est convergente d'après l'hypothèse faite  $R < 0$  et  $R_1 > 0$ .

On a  $B > |b_n|$ , pour  $n \geq N$ , pourvu que le coefficient de  $B$  soit positif, ce qui, quelle que soit la valeur du paramètre positif  $\lambda$ , sera réalisé pour  $N$  suffisamment grand. En effet, dans le produit

$p_k y^{(m-k)}$ , le coefficient de  $e^{(\rho+n)x}$  est égal à

$$\sum \frac{\alpha_\alpha b_{n-\alpha}}{(\rho+n-x)^k},$$

où  $\alpha$  entier positif ou négatif satisfait à l'inégalité

$$|n-\alpha| \geq N;$$

donc ce coefficient a un module inférieur à

$$P_k \frac{B}{N^k},$$

$B$  étant le module maximum des quantités  $b_n, |n| \geq N$ .

Ainsi le maximum de  $\lambda$  étant donné, on pourra assigner  $N$  de façon que l'équation majorante des équations d'indice  $|n| \geq N$  ait une racine positive; on pourra donc résoudre ces équations en ordonnant les inconnues  $b_n$  suivant les puissances croissantes de  $\lambda$ , sans se préoccuper de la convergence de leur déterminant. Substituant dans les  $2N+1$  équations homogènes d'indice inférieur en valeur absolue à  $N$ , on a un système de  $2N+1$  équations du premier degré à  $2N+1$  inconnues, homogènes; leur déterminant doit être nul pour qu'il y ait un système de solutions, ce qui donne une équation pour  $\rho$ ; cette équation étant satisfaite, les valeurs de  $b_n, |n| < N$ , seront proportionnelles aux déterminants partiels du premier ordre, supposés non nuls tous ensemble; ces déterminants sont des fonctions entières de  $\lambda$ .

4. Plus généralement,  $\rho$  étant une indéterminée, tirons des  $2N$  équations d'indice autre que zéro, les valeurs des  $b_n, N > |n| > 0$ , en fonctions de  $b_0$ ; puis substituons dans l'équation d'indice zéro, et soit  $\Delta(\rho)b_0$  ce que devient le premier membre; on a

$$y^{(m)} - \lambda [p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \dots + p_m y] = \Delta(\rho) b_0 e^{\rho x};$$

différentions  $l$  fois par rapport à  $\rho$ ; il vient

$$y^{(m)} - \lambda [p_1 y^{(m-1)} + \dots + p_m y] = b_0 e^{\rho x} [\Delta(\rho) x^l + l \Delta'(\rho) x^{l-1} + \dots + \Delta^{(l)}(\rho)],$$

en posant

$$y_l = \frac{d^l y}{d\rho^l}, \quad \Delta'(\rho) = \frac{d \Delta(\rho)}{d\rho}.$$

Ainsi si  $\rho$  est une racine multiple d'ordre  $l$  de l'équation  $\Delta(\rho) = 0$ ,  $y, y_1, \dots, y_{l-1}$  sont  $l$  solutions de l'équation (5).

Si  $\Delta(\rho)$  est différent de zéro, posons

$$b_0 = \frac{c}{\Delta(\rho)}, \quad \frac{y}{\Delta(\rho)} = z;$$

$z$  est une solution de l'équation

$$(6) \quad z^{(m)} - \lambda(p_1 z^{(m-1)} + \dots + p_m z) = ce^{\rho x}$$

et

$$\frac{d^l z}{d\rho^l}$$

de l'équation (6) où l'on remplace le second membre par  $cx^l e^{\rho x}$ .

Si la parenthèse de l'équation (5) contenait un terme en  $y^{(m)}$ , si l'on avait l'équation

$$y^{(m)} - \lambda[p y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \dots + p_m y] = 0,$$

le nouveau coefficient  $p$  étant de la même forme que les autres et, comme eux, convergent pour partie réelle de  $x$  comprise entre  $R$  et  $R_1$ , ce qui précède serait applicable, mais seulement pour les valeurs de  $\lambda$  inférieures à  $\frac{1}{P}$ ,  $P$  étant la somme des modules des coefficients de  $p$ .

5. Une solution du problème qui précède a été donnée par M. Poincaré (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XIV, p. 77) dans le cas de  $m = 2$ , et sa méthode a été étendue au cas général par M. Helge von Koch (*Acta mathematica*, t. XV et t. XVIII).

Mais la méthode actuelle, plus simple, est applicable à des équations linéaires aux dérivées partielles analogues, équations qu'on pourrait aussi bien appeler équations aux intégrales partielles.

Soit

$$u = \sum_m \sum_n a_{m,n} e^{(\rho+m)x + (\rho_1+n)y},$$

les sommes s'étendant à toutes les valeurs entières positives et négatives de  $m$  et de  $n$ . Désignons par  $u^{(\alpha, \beta)}$  une fonction de même forme ayant pour dérivée  $\alpha^{\text{ième}}$  par rapport à  $x$ , et  $\beta^{\text{ième}}$  par

rapport à  $y$  la fonction  $u$  :

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u^{(\alpha,\beta)}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = u,$$

$$u^{(\alpha,\beta)} = \sum_m \sum_n \alpha_{m,n} \frac{e^{\rho+m)x+(\rho_1+n)y}}{(\rho+m)^\alpha (\rho_1+n)^\beta},$$

$\rho$  et  $\rho_1$  indéterminés non entiers positifs ou négatifs, ni nuls.

Considérons les  $p$  équations

$$(7) \quad z_i - \lambda f_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

les  $f_i$  étant des fonctions homogènes et du premier degré des quantités  $z_j^{(\alpha,\beta)}$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ) et  $\alpha + \beta \geq 1$ ; de plus les coefficients sont des fonctions de la forme précédente, en  $y$  faisant  $\rho = \rho_1 = 0$ ,

$$\sum \sum \alpha_{m,n} e^{mx+ny},$$

ces séries étant toutes convergentes pour partie réelle de  $x$  comprise entre  $-R$  et  $R_1$ , et de  $y$  comprise entre  $-R'$  et  $R'_1$ ,  $R, R_1, R', R'_1$  étant des quantités positives.

Cherchons à satisfaire aux équations (7) par des fonctions de la forme de  $u$ ,

$$z_i = \sum_m \sum_n b_{m,n}^{(i)} e^{(\rho+m)x+(\rho_1+n)y};$$

on est conduit à une infinité d'équations entre les indéterminés  $b_{m,n}^{(i)}$  qui se réduisent respectivement à l'une de ces quantités pour  $\lambda = 0$ . Regardons pour un moment comme connue l'une des quantités  $b_{0,0}^{(0)}$  par exemple, et mettons de côté l'équation qui se réduit à  $b_{0,0}^{(0)}$  pour  $\lambda = 0$ ; les équations restantes permettent de développer les autres quantités  $b_{m,n}^{(i)}$  suivant les puissances croissantes de  $\lambda$ ; ces développements sont des fonctions entières de  $\lambda$ , convergents quelle que soit  $\lambda$ . Substituant dans l'équation mise à part, on est conduit à une relation entre  $\rho$  et  $\rho_1$ , et  $b_{0,0}^{(0)}$  peut être pris arbitrairement.

6. La méthode peut s'appliquer à des équations ne pouvant se ramener à la forme précédente; ainsi à l'équation

$$\alpha_0 \frac{\partial^{2p} z}{\partial x^{2p}} + \alpha_1 \frac{\partial^{2p} z}{\partial x^{2p-1} \partial y} + \dots + \alpha_k \frac{\partial^{2p} z}{\partial x^{2p-k} \partial y^k} + \dots + \alpha_{2p} \frac{\partial^{2p} z}{\partial y^{2p}} - u z = 0,$$

si elle est à caractéristiques imaginaires, c'est-à-dire si l'équation

$$a_0 r^{2p} + a_1 r^{2p-1} + \dots + a_k r^{2p-k} + \dots + a_{2p} = 0$$

n'a que des racines imaginaires,  $u$  étant toujours une fonction de la forme

$$\sum \sum a_{m,n} e^{mx+ny},$$

$m$  et  $n$  prenant toutes les valeurs entières positives et négatives.

Si l'on ne considère que les fonctions  $u$  régulières, c'est-à-dire si  $m$  et  $n$  ne prennent que les valeurs entières positives ou nulles, la méthode s'applique à l'équation

$$a_0 \frac{\partial^p z}{\partial x^p} + a_1 \frac{\partial^p z}{\partial x^{p-1} \partial y} + \dots + a_p \frac{\partial^p z}{\partial y^p} - \lambda f = 0,$$

$f$  étant une fonction linéaire et homogène des dérivées de  $z$  d'ordre inférieur à  $p$ , ayant par conséquent

$$1 + 2 + 3 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2} \text{ termes,}$$

les coefficients étant des fonctions régulières de  $x$  et  $y$  pourvu que l'équation

$$a_0 r^p + a_1 r^{p-1} + \dots + a_p = 0$$

n'ait pas de racine positive.

Enfin on peut étendre la méthode aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

---