

BULLETIN DE LA S. M. F.

R. GARNIER

Sur la rationalisation des coefficients d'une équation différentielle algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 146-148.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__146_1

© Bulletin de la S. M. F., 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LA RATIONALISATION
DES COEFFICIENTS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ALGÈBRE;**

PAR M. R. GARNIER.

Considérons une équation différentielle du troisième ordre (pour simplifier l'écriture), soit

$$(1) \quad y''' = R(y'', y', y; x),$$

où R est rationnelle en y'' et y' , algébrique en y , analytique en x , et dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. Je me propose de démontrer qu'on peut toujours trouver une relation algébrique

$$(2) \quad f(y, z; x) = 0$$

telle que les coefficients de la fonction rationnelle R de y'' et y' soient *rationnels en y et z* et que la fonction $z(x)$ définie par (2) [où l'on a remplacé y par l'intégrale générale de (1)] ait aussi ses points critiques fixes.

Tout d'abord, la fonction R étant algébrique en y , on peut toujours l'exprimer en fonction rationnelle de y et d'une irrationnelle $\zeta(y; x)$ liée à y par l'équation irréductible

$$(3) \quad \varphi(y, \zeta; x) = 0,$$

algébrique en y et ζ , analytique en x . L'équation (1) s'écrira alors

$$y''' \sum_h \sum_k a_{hk}(y, \zeta; x) y''^h y'^k = \sum_l \sum_j b_{lj}(y, \zeta; x) y''^l y'^j,$$

les a_{hk} et b_{lj} étant rationnels en y et ζ .

Cela étant, soient E l'ensemble des points singuliers du coefficient différentiel $R(y'', y', y, x)$ et e l'ensemble des points critiques des intégrales $y(x)$ de (1); ajoutons à E les points $x = \xi$ pour lesquels

l'équation (3) devient réductible, et soit \bar{x} un point n'appartenant pas à l'ensemble ainsi formé. Appelons y_0, y'_0, y''_0 un ensemble de valeurs régulières ⁽¹⁾ attribuées à y, y', y'' , et ζ_0 une des racines de l'équation algébrique $\varphi(y_0, \zeta; \bar{x}) = 0$. D'après le théorème de Cauchy il existe une intégrale de (1) répondant aux conditions initiales précédentes; soit D le domaine d'existence de cette intégrale. Relions les points de e situés à l'intérieur de D par des coupures que x ne pourra franchir, et soit D' ce que devient le domaine D après le tracé des coupures. L'intégrale $y(x)$ est une fonction uniforme à l'intérieur de D'; dès lors, deux cas sont à distinguer :

1° Ou bien, pour tout chemin fermé \mathcal{L} décrit par x à l'intérieur de D' sans rencontrer les points ξ , le point $\zeta(y)$ décrit sur la surface de Riemann (3) un cycle nul \ominus ⁽²⁾, et cela quelles que soient les conditions initiales choisies;

2° Ou bien il existe des chemins fermés \mathcal{L} et des conditions initiales tels que le cycle \ominus ne se réduit pas à zéro.

Dans le premier cas, il est clair que la fonction $\zeta(x)$ définie par l'équation (3), dans laquelle on a remplacé y par $y(x)$, n'a pas d'autres points critiques que les points de e . Nous n'avons donc à nous occuper que du second cas.

Appelons ζ_1 la valeur prise par ζ quand x a décrit le chemin \mathcal{L} en vertu de la fixité des points critiques de y on aura

$$(4) \quad \begin{aligned} & y''_0 \Sigma_h \Sigma_k [a_{hk}(y_0, \zeta_1; \bar{x}) - a_{hk}(y_0, \zeta_0; \bar{x})] y''_0{}^h y'_0{}^k \\ & = \Sigma_i \Sigma_j [b_{ij}(y_0, \zeta_1; \bar{x}) - b_{ij}(y_0, \zeta_0; \bar{x})] y''_0{}^i y'_0{}^j. \end{aligned}$$

Ceci posé, attribuons à y'' et y' des valeurs initiales Y''_0 et Y'_0 très voisines de y''_0 et y'_0 , et prenons toujours $Y_0 = y_0, Z_0 = \zeta_0$. D'après des théorèmes de M. H. Poincaré le chemin \mathcal{L} restera intérieur au domaine D' correspondant à la nouvelle intégrale $Y(x)$ de (1) et le nouveau cycle \ominus décrit par ζ sera très voisin du premier. Quand x aura décrit \mathcal{L} , la valeur finale de ζ sera donc encore ζ_1 ;

⁽¹⁾ Ceci exige que y_0 ne soit pas un point critique de la fonction $\zeta(y; \bar{x})$.

⁽²⁾ A vrai dire, la surface (3) se déforme quand x varie; mais elle reste toujours équivalente à elle-même (au point de vue de l'*analysis situs*) si x ne rencontre pas de points ξ .

en définitive, on pourra encore écrire l'identité (4) en remplaçant y'_0 et y''_0 par d'autres valeurs très voisines, mais *arbitrairement choisies*. Or ceci exige que l'on ait :

$$\begin{aligned} a_{hk}(y_0, \zeta_1; \bar{x}) &= a_{hk}(y_0, \zeta_0; \bar{x}), \\ b_{ij}(y_0, \zeta_1; \bar{x}) &= b_{ij}(y_0, \zeta_0; \bar{x}); \end{aligned}$$

il en résulte nécessairement que si a_{hk} , par exemple, dépend de ζ , la fonction

$$z = a_{hk}(y, \zeta; x),$$

où l'on a remplacé y par une intégrale *quelconque* de (1) et ζ par une branche de la fonction algébrique $\zeta(x)$ définie par (3), ne peut avoir de points critiques n'appartenant pas à e : il suffira d'exprimer ζ en fonction rationnelle de y et z pour avoir la représentation cherchée.

Le théorème précédent généralise une proposition énoncée dans ma Thèse (1); il s'étend évidemment à une équation d'ordre quelconque. Il est d'une grande importance au point de vue de la recherche des équations différentielles dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes; il fournit, en effet, des conditions supplémentaires qui doivent être vérifiées dans le domaine des points critiques de l'irrationnelle $z(y)$.

(1) *Ann. sc. Ec. Norm. sup.*, 3^e série, t. XXIX, 1912, p. 13.