BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LINDELÖF

Démonstration nouvelle d’un théorème fondamental sur les suites de fonctions monogènes

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 171-178.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__171_0>

DÉMONSTRATION NOUVELLE D'UN THÉORÈME FONDAMENTAL SUR LES SUITES DE FONCTIONS MONOGÈNES;

PAR M. ERNST LINDELÖF.

1. Il s'agit du théorème suivant, dont l'origine remonte à Weierstrass [1] et qui, sous sa forme définitive présentée ci-dessous, a été établi d'abord par M. Vitali [2]:

Considérons une suite indéfinie de fonctions monogènes

$$(1) \qquad f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

qui vérifient les trois conditions suivantes :

a. Elles sont toutes holomorphes à l'intérieur d'un certain domaine connexe T.

b. Elles sont bornées dans leur ensemble dans tout domaine fini T′, *intérieur au domaine* T *et n'ayant aucun point commun avec son contour; en d'autres termes, à chaque domaine donné* T′ *jouissant de cette propriété correspond un nombre positif* G′, *tel qu'on ait à l'intérieur et sur le contour du domaine* T′

$$|f_n(x)| < G' \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

c. La suite (1) *coenvrge vers une limite déterminée, nécessairement finie, en chaque point d'un certain ensemble infini de points* E, *faisant partie du domaine donné* T *et admettant au moins un point limite* x_0 *situé à l'intérieur de ce domaine.*

Dans ces conditions on peut affirmer que, à l'intérieur du domaine T, *les fonctions* (1) *tendent vers une fonction monogène* F(x), *holomorphe dans ce même domaine, et que les dérivées d'un ordre quelconque p des fonctions* (1) *tendent vers la dérivée correspondante* $F^{(p)}(x)$ *de la fonction* F(x).

[1] *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, p. 67-101.

[2] *Annali di Matematica pura ed applicata*, 3e série, t. X, 1904, p. 65-82.

De plus, les égalités

$$(2)\quad \lim_{n=\infty} f_n(x) = \mathrm{F}(x), \qquad \lim_{n=\infty} f_n^{(p)}(x) = \mathrm{F}^{(p)}(x) \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

auront lieu uniformément dans tout domaine tel que T'.

2. Pour la démonstration, nous choisirons d'abord comme domaine T' un cercle C' de centre x_0 dont tous les points soient intérieurs au domaine donné T. Soit C un cercle de même centre que C', mais de plus grand rayon, qui est également tout entier compris à l'intérieur de T. Nous désignerons par R et R' ($<$ R) les rayons des cercles C et C'.

En vertu de l'hypothèse a, les fonctions (1) sont développables en séries

$$f_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(x - x_0) + \ldots + a_\nu^{(n)}(x - x_0)^\nu + \ldots$$

qui convergent dans le cercle C et sur sa circonférence. Comme d'autre part, d'après l'hypothèse b, les modules $|f_n(x)|$ sont tous inférieurs à une certaine constante G sur la circonférence C, le théorème bien connu de Cauchy nous donne pour les coefficients de ces séries les inégalités

$$(3)\quad |a_0^{(n)}| < \mathrm{G}, \quad |a_1^{(n)}| < \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{R}}, \quad \ldots, \quad |a_\nu^{(n)}| < \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{R}^\nu}, \quad \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Cela posé, nous allons d'abord faire voir que les constantes $a_0^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tendent vers une limite déterminée. A cet effet, nous partons de l'égalité

$$f_{n+p}(x) - f_n(x) = (a_0^{(n+p)} - a_0^{(n)}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^{(n+p)} - a_\nu^{(n)})(x - x_0)^\nu,$$

et nous en tirons

$$|a_0^{(n+p)} - a_0^{(n)}| \leqq |f_{n+p}(x) - f_n(x)| + \sum_{\nu=1}^{\infty} |(a_\nu^{(n+p)} - a_\nu^{(n)})(x - x_0)^\nu|,$$

inégalité qui est valable pour $|x - x_0| \leqq \mathrm{R}$, n et p étant des entiers positifs quelconques. Or on a, d'après (3),

$$|(a_\nu^{(n+p)} - a_\nu^{(n)})| < \frac{2\mathrm{G}}{\mathrm{R}^\nu},$$

d'où il suit, pour $|x - x_0| < \mathrm{R}$,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |(a_\nu^{(n+p)} - a_\nu^{(n)})(x - x_0)^\nu| \leqq \frac{2\,\mathrm{G}\,|x - x_0|}{\mathrm{R} - |x - x_0|},$$

et l'inégalité précédente peut donc s'écrire

$$(4) \qquad |a_0^{(n+p)} - a_0^{(n)}| \leqq |f_{n+p}(x) - f_n(x)| + \frac{2\,\mathrm{G}\,|x - x_0|}{\mathrm{R} - |x - x_0|},$$

résultat qui reste valable pour $|x - x_0| < \mathrm{R}$, quels que soient les entiers positifs n et p.

Soit maintenant ε un nombre positif fixe, aussi petit qu'on voudra. On pourra choisir d'abord un nombre positif $\Delta (< \mathrm{R})$ tel que

$$\frac{2\,\mathrm{G}\,|x - x_0|}{\mathrm{R} - |x - x_0|} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{dès que} \qquad |x - x_0| < \Delta,$$

puis, en vertu de l'hypothèse c, on pourra trouver une valeur x' telle que $|x' - x_0| < \Delta$ et que la suite (1) converge pour $x = x'$, ce qui implique l'existence d'un entier positif n_0 tel qu'on ait

$$|f_{n+p}(x') - f_n(x')| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour} \qquad n > n_0,\ p > 0.$$

En faisant dans (4) $x = x'$, nous pouvons donc en conclure

$$|a_0^{(n+p)} - a_0^{(n)}| < \varepsilon \qquad \text{dès que} \qquad n > n_0,\ p > 0.$$

Mais cela signifie que les constantes $a_0^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tendent bien vers une limite finie et déterminée, comme nous l'avions avancé. En désignant cette limite par c_0 on aura d'ailleurs, en vertu de (3),

$$|c_0| \leqq \mathrm{G}.$$

3. Ce point établi, nous allons considérer les fonctions

$$(5) \quad \varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - a_0^{(n)}}{x - x_0} = a_1^{(n)} + a_2^{(n)}(x - x_0) + \ldots \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On constate immédiatement qu'elles jouissent pour $|x - x_0| \leqq \mathrm{R}$ des trois propriétés a, b et c. Elles sont en effet holomorphes pour ces valeurs de x; d'autre part, on a pour $|x - x_0| = \mathrm{R}$

$$|\varphi_n(x)| \leqq \frac{|f_n(x)| + |a_0^{(n)}|}{\mathrm{R}} < \frac{2\,\mathrm{G}}{\mathrm{R}} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

et, d'après un théorème bien connu, ces mêmes inégalités subsistent aussi pour $|x - x_0| < R$, de sorte que les fonctions (5) sont bien bornées dans leur ensemble dans le cercle C; enfin, puisque $\lim a_0^{(n)} = c_0$, les fonctions (5) tendent vers une limite déterminée en chaque point de l'ensemble E distinct du point x_0.

Nous pouvons donc appliquer le raisonnement du n° 2 aussi aux fonctions (5), et nous en concluons que les constantes

$$a_1^{(n)} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

convergent vers une limite finie et déterminée c_1, qui, d'après (3), vérifie nécessairement la condition

$$|c_1| \leqq \frac{G}{R}.$$

En considérant les fonctions

$$\frac{f_n(x) - a_0^{(n)} - a_1^{(n)}(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = a_2^{(n)} + a_3^{(n)}(x - x_0) + \ldots,$$

on conclut de même que les constantes $a_2^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ admettent une limite déterminée c_2 de module $\leqq \frac{G}{R^2}$, et, en s'appuyant sur le principe d'induction complète, on arrive ainsi à démontrer qu'on a pour toutes les valeurs de l'indice ν

$$\lim_{n=\infty} a_\nu^{(n)} = c_\nu, \tag{6}$$

c_ν étant une constante finie assujettie à l'inégalité

$$|c_\nu| \leqq \frac{G}{R^\nu}. \tag{7}$$

4. Les inégalités (7) nous montrent que la série

$$F(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots \tag{8}$$

définit une fonction monogène $F(x)$ qui est certainement holomorphe pour $|x - x_0| < R$, c'est-à-dire à l'intérieur du cercle C. D'autre part, nous pouvons conclure des résultats (3), (6) et (7) que la différence $f_n(x) - F(x)$ tend uniformément vers zéro dans le cercle C′ lorsque n augmente indéfiniment. Écrivons en effet cette différence sous la forme

$$f_n(x) - \mathrm{F}(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} (a_\nu^{(n)} - c_\nu)(x - x_0)^\nu + \sum_{\nu=k}^{\infty} (a_\nu^{(n)} - c_\nu)(x - x_0)^\nu.$$

On a d'après (3) et (7), quels que soient ν et n,

$$|a_\nu^{(n)} - c_\nu| \leqq |a_\nu^{(n)}| + |c_\nu| < \frac{2\mathrm{G}}{\mathrm{R}^\nu},$$

et dans le cercle C′ on aura donc

$$\left| \sum_{\nu=k}^{\infty} (a_\nu^{(n)} - c_\nu)(x - x_0)^\nu \right| < \sum_{\nu=k}^{\infty} 2\,\mathrm{G}\left(\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\right)^\nu = \frac{2\,\mathrm{G}\left(\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\right)^k}{1 - \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}}.$$

Puisque $\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}} < 1$, il est dès lors possible de choisir l'entier k assez grand pour que la somme considérée soit inférieure en valeur absolue à $\frac{\varepsilon}{2}$, quel que soit n. D'autre part, d'après (6), la somme finie

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} (a_\nu^{(n)} - c_\nu)(x - x_0)^\nu$$

tend uniformément vers zéro dans tout domaine fini lorsque n augmente indéfiniment; et son module est donc inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$ dans le cercle C′ dès que n est supérieur à un certain entier n_0. En somme, on aura donc dans le cercle C′

$$|f_n(x) - \mathrm{F}(x)| < \varepsilon \qquad \text{dès que} \qquad n > n_0,$$

ce qui montre que la différence $f_n(x) - \mathrm{F}(x)$ tend uniformément vers zéro dans ce cercle.

En partant de l'égalité

$$f_n^{(p)}(x) - \mathrm{F}^{(p)}(x) = \sum_{\nu=p}^{\infty} \nu(\nu-1)\ldots(\nu-p+1)(a_\nu^{(n)} - c_\nu)(x - x_0)^{\nu-p},$$

on conclut de même, par un raisonnement de tout point analogue à celui qui précède, que la différence

$$f_n^{(p)}(x) - \mathrm{F}^{(p)}(x),$$

quel que soit p, tend uniformément vers zéro dans le cercle C′ lorsque n augmente indéfiniment.

Nous avons donc démontré que les égalités (2) ont lieu uniformément dans le cercle C′ de centre x_0.

5. Prenons maintenant à l'intérieur de C′ un point quelconque x_1, et de ce point comme centre construisons un cercle C'_1 dont tous les points soient intérieurs au domaine donné T. La démonstration qui précède nous permet de conclure que, dans ce cercle C'_1, $f_n(x)$ tend uniformément vers $F_1(x)$ et $f_n^{(p)}(x)$ vers $F_1^{(p)}(x)$ lorsque n augmente indéfiniment, $F_1(x)$ étant une certaine fonction monogène qui est holomorphe dans le cercle en question. Les valeurs de $F_1(x)$ devant coïncider avec celles de $F(x)$ dans l'aire commune aux cercles C′ et C'_1, on voit d'ailleurs que l'une de ces fonctions constitue le prolongement analytique de l'autre.

En poursuivant ce procédé et en s'appuyant sur les définitions mêmes du domaine connexe et de la fonction monogène données par Weierstrass, on arrive à cette conclusion que la fonction monogène $F(x)$, définie par la série (8), est holomorphe à l'intérieur du domaine donné T, et que, d'autre part, les égalités (2) ont lieu uniformément dans un cercle quelconque dont tous les points soient intérieurs à ce domaine. Et puisque chaque domaine fini T′, qui est intérieur au domaine T et n'a aucun point commun avec son contour, peut être couvert tout entier par un nombre fini de tels cercles, il s'ensuit bien que les égalités (2) ont lieu uniformément dans tout domaine jouissant de cette propriété.

C. Q. F. D.

6. Du théorème démontré ci-dessus on peut tirer aisément cette autre proposition :

Étant donnée une suite infinie de fonctions monogènes

$$(9) \qquad f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

qui sont holomorphes dans un certain domaine connexe T *et bornées dans leur ensemble dans chaque domaine fini* T′, *intérieur au domaine* T *et n'ayant aucun point commun avec* *son contour, on peut toujours de cette suite en extraire une autre qui, à l'intérieur de* T, *converge vers une fonction monogène holomorphe, et cela uniformément dans tout domaine tel que* T'.

Fixons en effet à l'intérieur de T un point quelconque x_0, et choisissons d'autre part, suivant une loi quelconque, une suite infinie de points

$$(10) \qquad x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_\nu, \; \ldots$$

intérieurs à T et ayant x_0 comme point limite.

Nous allons considérer d'abord la suite des valeurs

$$(11) \qquad f_1(x_1), \; f_2(x_1), \; \ldots, \; f_n(x_1), \; \ldots$$

que prennent les fonctions (9) au point x_1. Cette suite admet une ou plusieurs valeurs limites, dont l'ensemble est nécessairement fermé. De ces valeurs limites, nous en choisirons une bien déterminée, par exemple la plus petite, ω; puis nous chercherons dans la suite (11) le premier nombre, soit $f_{p_1}(x_1)$, qui vérifie la condition $|f_{p_1}(x_1) - \omega| < \frac{1}{2}$; ensuite, parmi les nombres qui suivent $f_{p_1}(x_1)$, nous choisirons le premier, soit $f_{p_2}(x_1)$, qui vérifie la condition $|f_{p_2}(x_1) - \omega| < \frac{1}{2^2}$, et ainsi de suite. Nous arrivons ainsi à extraire de la suite donnée (9) une autre suite bien déterminée

$$(12) \qquad f_{p_1}(x), \; f_{p_2}(x), \; \ldots$$

qui tende vers la limite ω pour $x = x_1$.

La fonction $f_{p_1}(x)$ sera la première fonction de la suite cherchée.

Considérons maintenant les valeurs que prennent les fonctions

$$(13) \qquad f_{p_2}(x), \; f_{p_3}(x), \; \ldots$$

pour $x = x_2$. En suivant exactement les mêmes principes que ci-dessus, on arrive à extraire de la suite (13) une autre

$$f_{q_1}(x), \; f_{q_2}(x), \; \ldots$$

qui tende vers une limite déterminée aussi pour $x = x_2$. Nous choisirons $f_{q_1}(x)$ comme la deuxième fonction de la suite cherchée, puis nous considérerons les valeurs que prennent les fonctions

$$f_{q_2}(x), \quad f_{q_3}(x), \quad \ldots$$

pour $x = x_3$.

En continuant de la sorte et suivant toujours les mêmes principes, on arrive ainsi à une suite *parfaitement déterminée* de fonctions,

$$(14) \qquad f_{p_1}(x), \quad f_{q_1}(x), \quad \ldots,$$

extraite de la suite donnée (9) et qui tend vers une limite déterminée en chacun des points (10). Mais, en vertu du théorème établi plus haut, on peut alors affirmer que cette suite (14) converge vers une fonction holomorphe dans le domaine donné T, et cela uniformément dans tout domaine intérieur tel que T′. La proposition est donc démontrée.

Jusqu'à présent, on a toujours commencé par établir le théorème du n° 6, puis on en a déduit, par voie indirecte, le théorème du n° 1. Il nous semble que la marche que nous avons suivie ci-dessus est plus simple et plus naturelle ([1]).

([1]) Pour les démonstrations données antérieurement et pour la bibliographie, *voir* surtout :

P. Montel, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, p. 20-26;

C. Carathéodory et E. Landau, *Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen* (*Sitzungsberichte der Kön. Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Bd. XXVI, 1911, p. 587 595).

([2]) *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta Mathematica*, t. XXXII et XXXIII, 1909) (Prix Bordin, 1908).

([3]) *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione*