

# BULLETIN DE LA S. M. F.

J. TOUCHARD

## Sur la fonction gamma

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 41 (1913), p. 234-242.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1913\\_\\_41\\_\\_234\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__234_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**SUR LA FONCTION GAMMA.**

PAR M. JACQUES TOUCHARD.

I. Je me propose de démontrer en premier lieu la formule

$$(1) \quad e^x = \frac{1}{2} + \int_0^{\infty} \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z)} + \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xz} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\log z}{\pi} dz,$$

valable quand P.R.  $x > 0$ .

On a

$$e^x = \sum_0^{\infty} f(v),$$

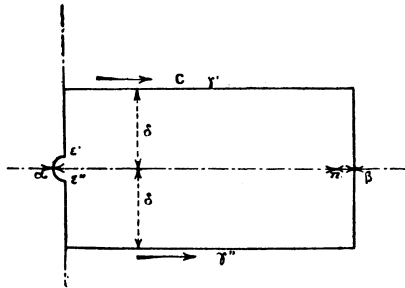
où

$$f(z) = \frac{z^z}{\Gamma(1+z)}.$$

Or,  $\pi \cot \pi z$  admettant les pôles 0, 1, 2, ... de résidus 1 et  $f(z)$  étant holomorphe, on a

$$\sum_0^n f(v) = \mathcal{C} f(z) (\pi \cot \pi z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \pi \cot \pi z f(z) dz.$$

Le contour C est constitué par des droites rectangulaires et par



un demi-cercle de rayon infiniment petit  $\epsilon$ , décrit de l'origine comme centre.

L'équation précédente s'écrit

$$\sum_0^n f(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\epsilon' \gamma'' \beta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\epsilon' \gamma' \beta},$$

les intégrales étant prises dans les sens marqués par les flèches.

Suivons une voie tracée par M. Lindelöf (le calcul des résidus, p. 56) et substituons

$$\pi \cot \pi z = \pi i + \frac{2\pi i}{e^{2\pi iz} - 1} \quad \text{dans l'intégrale } \int_{\alpha\epsilon' \gamma'' \beta}$$

et

$$\pi \cot \pi z = -\pi i - \frac{2\pi i}{e^{-2\pi iz} - 1} \quad \text{dans l'intégrale } \int_{\alpha\epsilon' \gamma' \beta}$$

il vient, en remarquant que

$$\int_{\alpha\epsilon' \gamma' \beta} f(z) dz = \int_{\alpha\epsilon' \gamma'' \beta} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz,$$

$$\sum_0^n f(v) = \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz + \int_{\alpha\epsilon' \gamma'' \beta} \frac{f(z) dz}{e^{2\pi iz} - 1} + \int_{\alpha\epsilon' \gamma' \beta} \frac{f(z) dz}{e^{-2\pi iz} - 1};$$

comme

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} + h(x),$$

$h(x)$  désignant une fonction holomorphe, il vient

$$\int_{\alpha \varepsilon}^{\beta} \frac{f(z) dz}{e^{2\pi i z} - 1} = \int_{\alpha \varepsilon}^{\beta} \frac{f(z) dz}{e^{-2\pi i z} - 1} = \frac{1}{4} f(0) = \frac{1}{4}.$$

On a donc

$$(2) \sum_0^n f(v) = \frac{1}{2} + \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz + i \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{f(zi) dz}{e^{2\pi i z} - 1} - i \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{f(-zi) dz}{e^{2\pi i z} - 1} + S,$$

$S$  étant la somme des quatre intégrales

$$\int_0^{\beta} \frac{x^{i\delta+t}}{\Gamma(i\delta+t+1)} \frac{dt}{e^{2\pi\delta-2\pi it} - 1} + \int_0^{\beta} \frac{x^{-i\delta+t}}{\Gamma(-i\delta+t+1)} \frac{dt}{e^{2\pi\delta+2\pi it} - 1} - i \int_0^{\delta} \frac{x^{\beta+it}}{\Gamma(\beta+it+1)} \frac{dt}{e^{2\pi t-2\pi i\beta} - 1} + i \int_0^{\delta} \frac{x^{\beta-it}}{\Gamma(\beta-it+1)} \frac{dt}{e^{2\pi t+2\pi i\beta} - 1}.$$

Quand on fait croître  $\beta$  et  $\delta$  indéfiniment,  $S$  tend vers zéro. On s'en assure en employant l'expression donnée par Mathias Lerch

$$\text{mod } \Gamma(\tau + it) = \sqrt{2\pi(\tau^2 + t^2)}^{\frac{1}{2}} \left(\tau - \frac{1}{2}\right) e^{-\tau - t \arctan \frac{t}{\tau}} \frac{t}{\tau(1 + \varepsilon)},$$

où  $\varepsilon$  est un nombre qui s'annule pour  $\tau = +\infty$  ou  $t = \pm\infty$ .

Faisons donc, dans (2),  $\beta$  et  $\delta$  infinis; il vient

$$e^x = \frac{1}{2} + \int_0^{\infty} \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z)} + i \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{zi}}{\Gamma(1+zi)} \frac{dz}{e^{2\pi z} - 1} - i \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{-zi}}{\Gamma(1-zi)} \frac{dz}{e^{2\pi z} - 1}$$

et, à l'aide de la formule des compléments

$$(3) e^x = \frac{1}{2} + \int_0^{\infty} \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z)} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\pi z} dz}{z} \frac{x^{-zi} \Gamma(1+zi) - x^{zi} \Gamma(1-zi)}{2i}.$$

Or

$$\frac{x^{-zi} \Gamma(1+zi) - x^{zi} \Gamma(1-zi)}{2i} = \int_0^{\infty} x e^{-xt} \sin(z \log t) dt.$$

Introduisant cette expression dans l'équation (3) et intervertissant l'ordre des intégrations dans l'intégrale double, on obtient finalement la formule (1) qui, à l'aide d'une intégration par parties,

s'écrit encore

$$e^x = \int_0^\infty \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z)} + \int_0^\infty \frac{e^{-xz} dz}{z(\pi^2 + \log^2 z)}.$$

Si l'on retranche de la formule (1) l'équation évidente

$$(4) \quad e^{-x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \int_0^1 e^{-xt} dt + \frac{x}{2} \int_1^\infty e^{-xt} dt,$$

on obtient

$$e^x - e^{-x} = \int_0^\infty \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z)} - \frac{x}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \operatorname{arc tang} \frac{\pi}{\log t} dt.$$

II. Appliquons la même méthode de M. Lindelöf à la série

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{x}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{x^2}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + \dots,$$

nous trouverons d'abord

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \int_0^\infty \frac{x^z dz}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} \\ &\quad + \frac{\sqrt{x}}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} e^{-\pi t} dt \int_0^\infty \frac{e^{-xz} dz}{\sqrt{z}} \sin(t \log z). \end{aligned}$$

Intervertissons l'ordre des intégrations et remarquons que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} e^{-\pi t} \sin at dt &= - \int_0^\infty e^{-\pi t} \sin at dt + 2 \int_0^\infty \frac{\sin at dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} \\ &= - \frac{a}{a^2 + \pi^2} + \frac{1}{2} \frac{e^a - 1}{e^a + 1}, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \int_0^\infty \frac{x^z dz}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} \\ &\quad + \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xz} dz}{\sqrt{z}} \frac{z-1}{z+1} - \frac{\sqrt{x}}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xz} dz}{\sqrt{z}} \frac{\log z}{\pi^2 + \log^2 z}. \end{aligned}$$

Or on prouve aisément, d'une part, que,

$$\frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xz} dz}{\sqrt{z}} \frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} - \sqrt{x} e^x + 2 \sqrt{\frac{x}{\pi}} e^x \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$$

et, d'autre part, que

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2e^x \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt.$$

L'égalité (5) devient donc

$$(6) \quad e^x = \int_0^\infty \frac{x^{z-\frac{1}{2}} dz}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xz} dz}{\sqrt{z}} \frac{\log z}{\pi^2 + \log^2 z},$$

formule valable tant que P.R.  $x > 0$ .

III. En remarquant que

$$e^x - \frac{1}{e} = \mathcal{C} x^z \cos \pi z \left[ \frac{P(1-z)}{z} \right],$$

où  $P(x)$  désigne la fonction de Prÿm, partie méromorphe de  $\Gamma(x)$ , on obtient une nouvelle expression de  $e^x$ , savoir

$$(7) \quad e^x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty x^z \sin \pi z \frac{P(1-z)}{z} dz \\ + \frac{x}{\pi} \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-xz} \operatorname{arc tang} \frac{\log z}{\pi} dz,$$

équation valable quand  $x$  est réel et compris entre 0 et 1.

IV. Voici deux conséquences des formules (1) et (6). Si l'on pose

$$e^{e^x} = e \sum_0^\infty a_n \frac{x^n}{n!},$$

on a

$$ea_n = \int_0^\infty \frac{z^n dz}{\Gamma(1+z)} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-x} \frac{\Gamma(n) \sin\left(n \operatorname{arc tang} \frac{\pi}{\log x}\right)}{(\pi^2 + \log^2 x)^{\frac{n}{2}}} dx$$

et symboliquement

$$e\left(a + \frac{1}{2}\right)^n = \int_0^\infty \frac{z^n dz}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \frac{\Gamma(n+1) \cos\left[(n+1) \operatorname{arc tang} \frac{\pi}{\log x}\right]}{(\pi^2 + \log^2 x)^{\frac{n+1}{2}}} dx,$$

formules qu'on peut généraliser.

Les nombres  $a_n$ , qui jouissent de propriétés élégantes, se présentent dans la partie holomorphe de  $x^p \frac{P(1-x) \pm P(1+x)}{2} \cos \pi x$  et, de ce fait, on peut déduire la formule (7).

V. On peut tirer de l'équation (1), en la différentiant, la formule

$$(8) \quad \int_{-n}^{\infty} \frac{dz}{\Gamma(z)} = e + (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-x} dx}{\pi^2 + \log^2 x},$$

où  $n$  est un entier positif ou nul. Je vais généraliser cette formule. Supposons que  $a$  désigne un nombre quelconque réel et positif; on a

$$\int_0^a xy \sin \pi y dy = \frac{z^a}{\pi^2 + \log^2 z} (\sin a \pi \log z - \pi \cos a \pi) + \frac{\pi}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

Multiplions par  $e^{-z} dz$  et intégrons de 0 à  $\infty$ ; le premier membre devient

$$-\int_{-a}^0 \frac{\pi}{\Gamma(z)} dz,$$

et l'on a

$$(9) \quad \int_{-a}^0 \frac{dz}{\Gamma(z)} = \cos a \pi \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a dz}{\pi^2 + \log^2 z} - \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a \log z dz}{\pi^2 + \log^2 z} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

On trouve de même,  $Q(x)$  désignant la fonction holomorphe de Prým,

$$(10) \quad \int_a^{\infty} \sin \pi y Q(1-y) dy = \pi \cos a \pi \int_1^{\infty} \frac{e^{-z} z^{-a} dz}{\pi^2 + \log^2 z} + \sin a \pi \int_1^{\infty} \frac{e^{-z} z^{-a} \log z dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

Cherchons une transformation analogue pour

$$(11) \quad \int_a^x \sin \pi y P(1-y) dy = -\int_a^{\infty} \frac{\sin \pi y dy}{y-1} + \frac{1}{1} \int_a^{\infty} \frac{\sin \pi y dy}{y-2} - \frac{1}{1.2} \int_a^{\infty} \frac{\sin \pi y dy}{y-3} + \dots$$

On démontre facilement que

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } a < n \\ \text{pour } a = n \\ \text{pour } a > n \end{array} \right. \begin{array}{l} \int_a^\infty \frac{\sin \pi y dy}{y-n} = (-1)^n \pi - \cos \pi a \int_0^\infty \frac{e^{-(n-a)\pi t} dt}{1+t^2} \\ \quad + \sin \pi a \int_0^\infty e^{-(n-a)\pi t} \frac{t dt}{1+t^2}; \\ \int_n^\infty \frac{\sin \pi y dy}{y-n} = (-1)^n \frac{\pi}{2}; \\ \int_a^\infty \frac{\sin \pi y dy}{y-n} = \cos \pi a \int_0^\infty \frac{e^{-(a-n)\pi z} dz}{1+z^2} + \sin \pi a \int_0^\infty \frac{e^{-(a-n)\pi z} z dz}{1+z^2}. \end{array}$$

Supposons d'abord, dans (11),  $a = 0$ ; il vient

$$\int_0^\infty \sin \pi y P(1-y) dy = \pi e + \pi \int_0^1 \frac{e^{-z} dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

En ajoutant membre à membre avec (10), où l'on a fait  $a = 0$ , il vient

$$\int_0^\infty \sin \pi y \Gamma(1-y) dy = \pi e + \pi \int_0^\infty \frac{e^{-z} dz}{\pi^2 + \log^2 z}$$

ou bien

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e + \int_0^\infty \frac{e^{-z} dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

Ajoutant alors à (9), on trouve

$$(13) \int_{-a}^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e + \cos a \pi \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^a dz}{\pi^2 + \log^2 z} - \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^a \log z dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

Si  $a$  est entier, on retrouve (8).

On déduit de (13)

$$\int_{-a}^\infty \frac{dz}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} = e + \sin a \pi \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^a dz}{\sqrt{z}(\pi^2 + \log^2 z)} \\ + \frac{\cos a \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^a \log z dz}{\sqrt{z}(\pi^2 + \log^2 z)}.$$

Le calcul de  $\int_a^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)}$  se fait ensuite à l'aide des formules (10), (11), (12) et donne le résultat suivant :

Supposons  $n < a < n + 1$  et posons

$$\varphi_{n-1}(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

on a

$$(14) \quad \int_a^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e - \varphi_{n-1}(1) + \cos a \pi \int_0^\infty \frac{z^{-a} dz}{\pi^2 + \log^2 z} [e^{-z} - \varphi_{n-1}(-z)] \\ + \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^{-a} \log z dz}{\pi^2 + \log^2 z} [e^{-z} - \varphi_{n-1}(-z)].$$

Reportons-nous au Mémoire de Cauchy *Sur un nouveau genre d'intégrales* (anciens exercices d'Analyse, 1<sup>re</sup> année), nous verrons que la formule (14) peut s'écrire

$$\int_a^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e - \varphi_{n-1}(1) + \cos a \pi \int_0^\infty \frac{z^{-a} e^{-z} dz}{\pi^2 + \log^2 z} \\ + \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^{-a} e^{-z} \log z dz}{\pi^2 + \log^2 z},$$

le symbole  $\int'$  représentant ce que Cauchy appelle une intégrale extraordinaire. La formule (14) subsiste si  $a$  est entier, et l'on a

$$\int_n^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e - \varphi_{n-1}(1) + (-1)^n \int_0^\infty \frac{z^{-n} dz}{\pi^2 + \log^2 z} [e^{-z} - \varphi_{n-1}(-z)].$$

VI. On peut généraliser l'équation (13) en cherchant la valeur principale des intégrales

$$\int_{-a}^\infty \frac{\sin b \pi y}{\sin \pi y} \frac{dy}{\Gamma(y)}, \quad \int_{-a}^\infty \frac{\cos b \pi y}{\sin \pi y} \frac{dy}{\Gamma(y)},$$

où  $b$  est un nombre réel et positif.

En employant la marche que je viens de suivre au paragraphe V,

on trouve

$$(15) \text{ val. pr. } \int_{-a}^{\infty} \frac{\sin b \pi y}{\sin \pi y} \frac{dy}{\Gamma(y)}$$

$$= -e^{-\cos \pi b} \cos(\pi b - \sin \pi b)$$

$$+ b \cos \pi b a \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a dz}{\pi^2 b^2 + \log^2 z} - \frac{\sin \pi b a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a \log z dz}{\pi^2 b^2 + \log^2 z},$$

$$\text{val. pr. } \int_{-a}^{\infty} \frac{\cos b \pi y}{\sin \pi y} \frac{dy}{\Gamma(y)}$$

$$= e^{-\cos \pi b} \sin(\pi b - \sin \pi b)$$

$$+ b \sin \pi b a \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a dz}{\pi^2 b^2 + \log^2 z} + \frac{\cos \pi b a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a \log z dz}{\pi^2 b^2 + \log^2 z},$$

$a$  est un nombre réel positif ou nul.

Quand  $b$  est un nombre entier positif, le premier membre de (15) se réduit à

$$\int_{-a}^{\infty} \frac{\sin n \pi y}{\sin \pi y} \frac{dy}{\Gamma(y)},$$

car  $\sin n \pi y$  est divisible par  $\sin \pi y$ .

---