BULLETIN DE LA S. M. F.

A. PELLET

Sur la méthode des réduites

Bulletin de la S. M. F., tome 42 (1914), p. 48-53.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914__42__48_1>

SUR LA MÉTHODE DES RÉDUITES;

PAR M. A. PELLET.

1. Considérons le système d'équations

$$(1) \qquad x_i - \varphi_i = c_i, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty,$$

les φ_i étant des fonctions homogènes du premier degré des inconnues x_k,

$$\varphi_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ik}x_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k,$$

et les a et les c des quantités données; en même temps, le système des équations majorantes [1]

$$(2) \qquad X_i - \Psi_i = C_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, \infty,$$

où Ψ_i est une fonction majorante de φ_i,

$$\Psi_i = \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik}X_k,$$

$$A_{ik} \geqq |a_{ik}| \qquad \text{et} \qquad C_i \geqq |c_i|.$$

Si les premiers membres des équations (2) sont positifs pour un système de valeurs positives des X : $X_i^{(0)}, \ldots, X_k^{(0)}, \ldots$, les équations (1) admettent un système de solutions qui peut être obtenu par la méthode des réduites.

---

(1) *Voir* mon Mémoire *Sur les équations majorantes* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXVII, 1909, p. 93).

Observons d'abord qu'on peut supposer les quantités $X_k^{(0)}$ égales toutes à 1, par le changement de variables

$$x_k = X_k^{(0)} y_k.$$

Ainsi nous supposerons

$$1 > \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Remplaçons par zéro toutes les inconnues, sauf x_i dans la $i^{\text{ième}}$ équation du système $x_i - \varphi_i = c_i$; elle donne alors pour x_i la valeur $\frac{c_i}{1 - a_{ii}}$; posons

$$x_i = \frac{c_i}{1 - a_{ii}} + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty);$$

les équations en y_i ont la même forme que les équations en x_i, les seconds membres seuls étant changés. Opérant sur les équations nouvelles comme sur les précédentes et ainsi indéfiniment, on obtiendra pour les x_i des séries absolument convergentes. En effet, les opérations analogues effectuées sur les équations (2) donnent pour les X_i des séries à termes positifs, supérieurs aux modules des termes correspondants des séries x_i; d'ailleurs on a

$$\frac{C}{1 - S} \geqq X_i,$$

C étant le plus grand des nombres C_i et S la plus grande des sommes supposée inférieure à 1,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \qquad (i = 1, \ldots, \infty).$$

Cela posé, remplaçons par zéro, dans les m premières équations du système (1), toutes les inconnues x, sauf celles dont les indices sont inférieurs à $m+1$, x_1, x_2, ..., x_m, et désignons par $x_1^{(m)}$, $x_2^{(m)}$, ..., $x_m^{(m)}$ les valeurs que ces m équations donnent alors pour ces inconnues. On a

$$\frac{C}{1 - S_m} \geqq |x_i^{(m)}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

S_m étant la plus grande des m sommes

$$\sum_{k=1}^{m} A_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

La série

$$x_i^{(1)} + (x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) + \ldots + (x_i^{(m)} - x_i^{(m-1)}) + \ldots$$

est absolument convergente, et l'on a

$$X_i^{(m)} - X_i^{(m-1)} \geqq | x_i^{(m)} - x_i^{(m-1)} |,$$

$X_i^{(m)}$ étant définie à l'aide des équations (2) de la même manière que $x_i^{(m)}$ à l'aide des équations (1). Posons

$$x_i^{(m)} - x_i^{(m-1)} = u_i, \qquad X_i^{(m)} - X_i^{(m-1)} = U_i \qquad (i = 1, \ldots, \infty)$$

et remplaçons, dans les équations déterminant $x_1^{(m)}, \ldots, x_m^{(m)}$, ces inconnues par $x_i^{(m-1)} + u_i$, pour i inférieur à m, sans modifier $x_m^{(m)}$; les seconds membres de $m - 1$ premières équations s'annulent, et ces équations deviennent

$$u_i - \sum_{k=1}^{m-1} a_{ik} u_k - a_{im} x_m^m = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m - 1),$$

$$(1 - a_{m,m}) x_m^{(m)} - \sum_{k=1}^{k=m-1} a_{mk} u_k = c_m + \sum_{k=1}^{m-1} a_{mk} x_k^{(m-1)}.$$

Les équations déterminant $U_1, \ldots, U_{m-1}$ et $X_m^{(m)}$ sont majorantes de celles-ci; ainsi la proposition est démontrée.

2. Le rapport des deux fonctions, $\frac{F_1(x)}{F(x)}$,

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n, \qquad F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n x_n,$$

peut être ordonné suivant les puissances positives et négatives de x, et les coefficients du développement être obtenus par la méthode des réduites, si l'on peut satisfaire par des valeurs positives de ρ à l'inégalité

$$(1) \qquad A_0 > A_1 \rho + A_{-1} \frac{1}{\rho} + \ldots + A_n \rho^n + A_{-n} \frac{1}{\rho^n} + \ldots,$$

$A_n \geqq |a_n|$ pour toute valeur entière positive ou négative de n, mais $A_0 \leqq |a_0|$; et le développement est valable au moins pour les valeurs de x dont le module satisfait à cette inégalité, et qui rendent convergente la fonction $F_1(x)$. Le terme a_0 n'étant pas nul, peut être pris égal à 1 et par un changement de variable au besoin, on peut s'arranger de façon que l'inégalité (1) soit satisfaite par $\rho = 1$. Posons

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n x^n;$$

on a, pour déterminer les c, les équations

$$b_n = a_0 c_n + a_1 c_{n-1} + a_{-1} c_{n+1} + \ldots + a_m c_{n-m} + a_{-m} c_{n+m} + \ldots,$$

n prenant toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. On se trouve bien dans le cas étudié tantôt.

Si l'on ajoute toutes ces équations, on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n = \left(\sum_{n-\infty}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\right).$$

Lorsque $a_n = a_{-n}$, $b_n = b_{-n}$, on aura aussi $c_n = c_{-n}$. En effet, en retranchant les équations d'indices n et $-n$, on a

$$0 = c_n - c_{-n} + a_1(c_{n-1} - c_{-n+1} + c_{n+1} - c_{n-1}) + \ldots,$$

et le terme en c_0 disparaît. On pourra donc ne retenir que les équations à indices positifs, en y remplaçant c_{-m} par c_m (m positif), et l'équation d'indice 0.

De même, si $a_n = a_{-n}$, $b_n = -b_{-n}$, il viendra $c_n = -c_{-n}$.

3. Soient

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} x^n, \qquad F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} x^n.$$

L'inégalité (1) est satisfaite pour des valeurs positives de ρ, si

$$1 > 2(Q + Q^4 + \ldots + Q^{n^2} + \ldots),$$

où Q représente le module de q, $Q = |q|$. Les considérations précédentes justifient donc dans ce cas la méthode suivie par

M. Appell (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1885, reproduite par M. Frédéric Riesz, dans son Ouvrage *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, p. 13 et suiv.). La continuité permet ensuite d'étendre le résultat obtenu aux valeurs de q dont le module est inférieur à 1 et de x, comprises entre les cercles de rayons $|q|$ et $\frac{1}{|q|}$. Si l'on décrit de l'origine comme centre des cercles passant par les divers pôles de la fonction $\frac{F_1(x)}{F(x)}$, on voit aisément que cette fonction peut être représentée dans chacune de ces couronnes par une série de Laurent; ces séries peuvent se déduire de l'une d'elles par le changement de x en $q^{-2\nu}x$.

4. Revenons aux équations du n° 1. Si l'inégalité

$$1 > \sum_{k=m+1}^{\infty} A_{ik} \qquad (i = m+1, \ldots, \infty)$$

est satisfaite pour toutes les valeurs de i supérieures à m, on pourra résoudre le système

$$x_i - \varphi_i^{(1)} = c_i + \sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k \qquad (i = m+1, \ldots, \infty),$$

où $\varphi_i^{(1)}$ est une fonction des x, d'indices supérieurs à m, par rapport aux inconnues $x_{m+1}, \ldots, x_\infty$; substituant dans les m premières équations, on sera ramené à un système de m équations du premier degré à m inconnues. Dans le cas où les coefficients a sont fonctions d'un paramètre ω, et toutes les quantités c nulles, l'inégalité

$$1 > \sum_{k=m+1}^{\infty} A_{ik} \qquad (i = m+1, \ldots, \infty)$$

étant satisfaite pour toutes les valeurs de module inférieur au nombre positif Ω, il faudra chercher les valeurs de ω, de module inférieur à Ω, qui annulent le déterminant des m équations du premier degré restantes. C'est le problème qui se pose pour la recherche des solutions irrégulières des équations linéaires.

[*Voir* mon Mémoire *Sur les systèmes infinis d'équations* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLI, 1913, p. 119) (1).]

---

(1) Dans les nos 3 et suivants de ce Mémoire, $2N+1$ doit être changé en $2N-1$, et $|\lambda|$ supposé inférieur à un nombre positif qu'on peut assigner.