

# BULLETIN DE LA S. M. F.

V. MYLLER-LEBEDEFF

## Sur un théorème de Gauss-Arndt relatif aux congruences binômes

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 50 (1922), p. 148-153.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1922\\_\\_50\\_\\_148\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1922__50__148_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**SUR UN THÉORÈME  
DE GAUSS-ARNDT RELATIF AUX CONGRUENCES BINOMES;**

PAR VERA MYLLER-LEBEDEFF.

On sait que la congruence binome

$$x^\delta \equiv 1 \pmod{n, \text{ ou } n = p^\alpha \text{ ou } 2p^\alpha}$$

( $p$  un nombre premier  $\neq 2$ ), où l'on peut toujours supposer  $\delta$  diviseur de  $\varphi(n)$ , a exactement  $\delta$  racines dont  $\varphi(\delta)$  appartiennent à l'exposant  $\delta$ .

Gauss a démontré (*Disqu. Arithm.*, art. 81) que la somme des racines primitives de  $p$ , c'est-à-dire des nombres appartenant à l'exposant  $\varphi(p)$  est  $\equiv 0 \pmod{p}$ , si  $p - 1$  est divisible par un carré, ou  $\equiv \pm 1 \pmod{p}$ , si  $p - 1$  est le produit de facteurs premiers inégaux. Arndt a généralisé ce résultat (*Journal de Crelle*, t. 31, p. 326) de la façon suivante : « La somme des nombres appartenant au même exposant  $\delta \pmod{p}$  est  $\equiv 0 \pmod{p}$ , si  $\delta$  est divisible par un carré, et  $\equiv \pm 1 \pmod{p}$ , si  $\delta$  n'est divisible par aucun carré. »

Bachmann (*Niedere Zahlentheorie*, t. I, p. 333) a cru que l'on puisse énoncer le théorème d'Arndt de la même façon pour le module  $p^\alpha$ ,  $2p^\alpha$ ,  $\delta$  étant un diviseur quelconque de

$$\varphi(p^\alpha) = \varphi(2p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1).$$

Ensuite il a observé pourtant (*voir le même Volume*, p. 402, *Zusätze*) que le théorème n'est vrai que si  $\delta$  est diviseur de  $p - 1$ ; en particulier, il ne peut pas être appliqué aux racines primitives de  $p^\alpha$ ,  $2p^\alpha$ , le cas de Gauss excepté.

On peut cependant généraliser le théorème de Gauss-Arndt pour le module  $p^\alpha$ ,  $2p^\alpha$ , et nous nous proposons de le faire dans ce qui suit. Le résultat est le suivant :

Soit

$$\delta = p^k q_1^m q_2^n \dots q_i^t$$

un diviseur de

$$\varphi(p^\alpha) = \varphi(2p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1) = p^{\alpha-1} q_1^{\beta} q_2^{\gamma} \dots q_i^{\epsilon} q_{i+1}^{\zeta} \dots q_r^{\tau}.$$

La somme des nombres appartenant à l'exposant  $\delta$  est

$$\equiv 0 \pmod{p^\alpha \text{ ou } 2p^\alpha}$$

si  $\delta : p^k$  est divisible par un carré et

$$\equiv (-1)^i \varphi(p^k) \pmod{p^\alpha}, \quad \text{resp.} \equiv (p^\alpha - 1)^i \varphi(p^k) \pmod{2p^\alpha},$$

si  $\delta : p^k$  est le produit de facteurs premiers inégaux. Pour  $k = 0$ , il est à poser  $\varphi(1) = 1$ . En particulier, la somme des racines primitives de  $p^\alpha$ ,  $2p^\alpha$  est

$$\equiv 0$$

si  $p - 1$  est divisible par un carré et

$$\equiv (-1)^r \varphi(p^{\alpha-1}) \pmod{p^\alpha}, \quad \text{resp.} \equiv (p^\alpha - 1)^r \varphi(p^{\alpha-1}) \pmod{2p^\alpha},$$

si  $p - 1$  ne l'est pas.

*Démonstration.* — Soit  $g$  une racine primitive de  $p^\alpha$ ,  $2p^\alpha$ ; pour  $2p^\alpha$ , on doit toujours supposer  $g$  impair. On a le théorème connu :  $g^h$  appartient à l'exposant

$$\delta = \varphi(p^\alpha) : d \pmod{p^\alpha \text{ ou } 2p^\alpha},$$

alors, et seulement alors, quand  $d$  est le plus grand commun diviseur de  $h$  et  $\varphi(p^\alpha)$ . Par conséquent,

$$g^{x_i M_i}, \quad \text{où} \quad M_i = p^{\alpha-1} \frac{p-1}{q_i^i},$$

et  $x_i$  parcourt les  $\varphi(q_i^i)$  nombres premiers avec  $q_i$ , et  $< q_i^i$  représente tous les  $\varphi(q_i^i)$  nombres appartenant à l'exposant  $q_i^i$ . Notons que

$$g^{M_i} - 1 \not\equiv 0 \pmod{p},$$

car  $M_i$  n'est pas divisible par  $p - 1$ . De même

$$g^{y_i N}, \quad \text{où} \quad N = p^{\alpha-1-k} (p-1)$$

et  $y_i$  sont les  $\varphi(p^k)$  nombres premiers avec  $p$ , et  $< p^k$  donne tous les nombres appartenant à  $p^k$ .

Un nombre appartenant à  $\delta$  peut être représenté par le produit de nombres appartenant respectivement aux facteurs de  $\delta$  premiers entre eux. Ce théorème, connu pour le module  $p$ , est encore vrai

pour le module  $p^\alpha$ ,  $2p^\alpha$ . En effet, l'exposant  $h$  d'un tel produit,

$$g^{x_1 M_1 + x_2 M_2 + \dots + x_i M_i + y_i N} = g^h,$$

a le plus grand commun diviseur avec  $\varphi(p^\alpha)$  égal à

$$p^{\alpha-1-k} q_1^{\beta-m} q_2^{\gamma-n} \dots q_i^{\varepsilon-t} q_{i+1}^\sigma \dots q_r^\tau;$$

donc  $g^h$  appartient bien à l'exposant  $\delta$ .

Il s'ensuit que, désignant par  $S$  la somme cherchée des nombres appartenant à  $\delta$ , et par  $P_1, P_2, \dots, R$  les sommes des nombres appartenant respectivement à  $q_1^m, q_2^n, \dots, p^k$ , on a

$$S \equiv P_1 P_2 \dots R \pmod{p^\alpha \text{ ou } 2p^\alpha}.$$

Soit d'abord  $m > 1$ . Les  $\varphi(q_1^m)$  nombres  $x_i$  se partagent en systèmes de  $q_1$  nombres

$$\begin{aligned} x_1, x_1 + \frac{\delta}{q_1}, x_1 + \frac{2\delta}{q_1}, \dots, x_1 + \frac{(q_1-1)\delta}{q_1}, \\ x'_1, x'_1 + \frac{\delta}{q_1}, x'_1 + \frac{2\delta}{q_1}, \dots, x'_1 + \frac{(q_1-1)\delta}{q_1}, \\ \dots \end{aligned}$$

et la somme des nombres provenant de chaque système est  $\equiv 0$ .

En effet,

$$g^{x_1 M_1} + g^{\left(x_1 + \frac{\delta}{q_1}\right) M_1} + \dots + g^{\left(x_1 + \frac{(q_1-1)\delta}{q_1}\right) M_1} = g^{x_1 M_1} \frac{g^{\delta M_1} - 1}{g^{\frac{\delta}{q_1} M_1} - 1}.$$

Mais  $\delta M_1 : q_1$  n'est pas divisible par  $p - 1$ , tandis que  $\delta M_1$  est divisible par  $p^{\alpha-1} (p - 1)$ ; donc

$$g^{\delta M_1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^\alpha \text{ ou } 2p^\alpha},$$

tandis que

$$g^{\frac{\delta}{q_1} M_1} - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Ainsi

$$P_1 \equiv 0 \pmod{p^\alpha \text{ ou } 2p^\alpha};$$

donc

$$S \equiv 0 \pmod{p^\alpha \text{ ou } 2p^\alpha}. \quad \text{C. Q. F. I}$$

Supposons en second lieu  $m = 1, n = 1, \dots, t = 1$ . On a

$$P_1 = g^{M_1} + g^{2M_1} + \dots + g^{(q_1-1)M_1} = \frac{g^{q_1 M_1} - 1 - (g^{M_1} - 1)}{g^{M_1} - 1} \equiv -1 \pmod{p^\alpha},$$

car  $g^{q, M_1-1} = g^{\delta-1} = Mp^\alpha$  et  $g^{M_1-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

Dans le cas du module  $2p^\alpha$ , on voit que  $P_1$  est pair; donc

$$P_1 = (2M + 1)p^\alpha - 1$$

ou

$$P_1 \equiv p^\alpha - 1 \pmod{2p^\alpha}.$$

Il reste à calculer la somme  $R$  des nombres appartenant à  $p^k$  ( $0 < k \leq \alpha - 1$ ). Pour cela on pourrait encore employer la représentation par les puissances d'une racine primitive; mais on arrive plus simplement au résultat en développant les nombres appartenant à l'exposant  $p^k \pmod{p^\alpha}$ , d'après les puissances de  $p$  <sup>(1)</sup>.

Observons d'abord qu'un nombre appartenant à  $p^k \pmod{p^\alpha}$  appartient aux exposants  $p^{k-1}, p^{k-2}, \dots, 1$  par rapport aux modules  $p^{\alpha-1}, p^{\alpha-2}, \dots, p^{\alpha-k}$ . On le voit tout de suite en représentant ce nombre sous la forme  $g^{y_i^N}, N = p^{\alpha-1-k}(p-1)$  de ci-dessus. Ce nombre (nommons-le  $m_k$ ) doit donc être de la forme

$$m_k = 1 + Mp^{\alpha-k}, \quad \text{où } M \not\equiv 0 \pmod{p},$$

car autrement  $m_k$  appartiendrait à  $1$  et non à  $p \pmod{p^{\alpha-k+1}}$ . Si  $M$  satisfait cette condition,  $m_k$  appartient bien à  $p^k \pmod{p^\alpha}$ .

Démonstrons-le par l'induction. D'abord on voit que  $m_k$  appartient à  $p \pmod{p^{\alpha-k+1}}$ ; en effet, si  $t$  était l'exposant de  $m_k \pmod{p^{\alpha-k+1}}$ , on aurait

$$m_k^t \equiv 1 \pmod{p^{\alpha-k+1}}$$

ou

$$(1 + Mp^{\alpha-k})^t = 1 + Mt p^{\alpha-k} + M' p^{\alpha-k+1} \equiv 1 \pmod{p^{\alpha-k+1}};$$

donc  $Mt \equiv 0 \pmod{p}$  et, par suite,  $t = p$ .

Supposons maintenant que  $m_k$  appartient à  $p^{n-1} \pmod{p^{\alpha-k+n-1}}$ , et soit  $t$  l'exposant de  $m_k$  par rapport au mod  $p^{\alpha-k+n}$

$$m_k^t \equiv 1 \pmod{p^{\alpha-k+n}},$$

donc

$$\equiv 1 \pmod{p^{\alpha-k+n-1}} \quad \text{et} \quad t = p^{n-1} t_1.$$

Mais, d'après un théorème de Gauss (*Disqu. Arithm.*, art. 86),

(1) Pour cette méthode, voir aussi M. FONTENÉ, *Sur les modules de la forme  $p^{nk}$*  (*Nouvelles Annales*, 4<sup>e</sup> série, t. VIII, p. 193).

si  $t$  est divisible par  $p^{n-1}$  et non par  $p^n$ , on a

$$(1 + Mp^{\alpha-k})^t - 1 \equiv Mt p^{\alpha-k} \pmod{p^{\alpha-k+n}};$$

donc  $Mt p^{\alpha-k}$  est divisible par  $p^{\alpha-k+n}$  et  $t \equiv p^n$ . c. Q. F. D.

$m_k$  est donc de la formé

$$m_k = 1 + i_1 p^{\alpha-k} + i_2 p^{\alpha-k+1} + \dots + i_k p^{\alpha-1},$$

où  $i_1$  peut prendre les valeurs  $1, 2, \dots, p-1$  et  $i_2, \dots, i_k$  les valeurs  $0, 1, 2, \dots, p-1$ . Tous ces nombres sont incongrus entre eux  $(\text{mod } p^\alpha)$ , car en posant

$$m'_k = 1 + i'_1 p^{\alpha-k} + i'_2 p^{\alpha-k+1} + \dots + i'_k p^{\alpha-1},$$

on tirerait de la congruence

$$m_k - m'_k \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

ou

$$i_1 - i'_1 + (i_2 - i'_2)p + \dots + (i_k - i'_k)p^{k-1} \equiv 0 \pmod{p^k},$$

que les différences  $i_1 - i'_1, i_2 - i'_2, \dots, i_k - i'_k$  sont nulles à la fois.

Nous avons donc à calculer

$$R = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} m_k,$$

où  $i_1, i_2, \dots, i_k$  varient dans les limites indiquées. Employons encore l'induction. Désignons par  $m_1, m_2, \dots$  les nombres appartenant à  $p, p^2, \dots \pmod{p^{\alpha-k+1}, p^{\alpha-k+2}, \dots}$ . On a

$$\sum_{i_1=1}^{p-1} m_1 = \sum_{i_1=1}^{p-1} (1 + i_1 p^{\alpha-k}) = p - 1 + p^{\alpha-k}(1 + 2 + \dots + p - 1) \equiv p - 1 \pmod{p^{\alpha-k+1}}$$

et

$$\sum_{i_1} m_2 = \sum_{i_1} \sum_{i_2=0}^{p-1} (m_1 + i_2 p^{\alpha-k+1}) = \sum_{i_1} p m_1 + M p^{\alpha-k+2} \equiv p(p-1) \pmod{p^{\alpha-k+2}}.$$

Supposons que

$$\sum_{i_1, \dots, i_{k-1}} m_{k-1} \equiv p^{k-2}(p-1) \pmod{p^{\alpha-1}}.$$

Il s'ensuivra

$$R = \sum m_k = \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}} \sum_{i_k=0}^{p-1} (m_{k-1} + i_k p^{\alpha-1}) = \sum p m_{k-1} + M p^\alpha,$$

$$R \equiv p^{k-1} (p-1) \equiv \varphi(p^k) \pmod{p^\alpha}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

D'ailleurs, on a aussi

$$R \equiv \varphi(p^k) \pmod{2p^\alpha},$$

parce qu'on doit supposer les  $\varphi(p^k)$  nombres appartenant à  $p^k \pmod{2p^\alpha}$  impairs; donc R est pair.

Maintenant les congruences

$$S \equiv P_1 P_2 \dots P_t R \pmod{p^\alpha \text{ ou } 2p^\alpha},$$

$$P_1 \equiv -1 \pmod{p^\alpha} \quad \text{ou} \quad \equiv p^\alpha - 1 \pmod{2p^\alpha},$$

$$R \equiv \varphi(p^k) \pmod{p^\alpha \text{ ou } 2p^\alpha},$$

établies, on conclut dans le cas que  $\delta : p^k$  a tous ses facteurs premiers inégaux :

$$S \equiv (-1)^t \varphi(p^k) \pmod{p^\alpha}$$

et

$$S \equiv (p^\alpha - 1)^t \varphi(p^k) \pmod{2p^\alpha}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$