BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

Sur les développements en série suivant les inverses de polynômes

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 189-191.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__189_0>

SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE SUIVANT LES INVERSES DE POLYNOMES ;

PAR M. PAUL APPELL.

Dans le *Bulletin de la Société mathématique* (p. 7-48, 1920), j'ai résumé diverses recherches antérieures. Il est évident que, étant donnée une suite de polynomes dans les conditions indiquées

$$P_\nu(x) = x^\nu + a_{1,\nu}\, x^{\nu-1} + a_{2,\nu}\, x^{\nu-2} + \ldots + a_{\nu,\,\nu},$$

si l'on développe $\frac{1}{x-y}$ par une série

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{P_1(x)} + \frac{Q_1(y)}{P_2(x)} + \frac{Q_2(y)}{P_3(x)} + \ldots,$$

on peut, par l'identification des développements des deux membres en séries procédant suivant les puissances de $\frac{1}{x}$, $|y| < |x|$, déterminer les polynomes $Q_1(y)$, $Q_2(y)$, ..., $Q_\nu(y)$ dont les coefficients apparaissent alors comme polynomes par rapport aux coefficients $a_{m,k}$ des polynomes P_ν.

Comme je l'ai montré, on peut considérer l'intégrale

$$I_n^\nu = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{Q_\nu(x)}{P_{n+1}(x)}\, dx$$

prise, dans le sens positif, sur un contour C entourant toutes les racines du polynome donné $P_{n+1}(x)$; la notation $Q_\nu(x)$ désigne un polynome de degré ν

$$Q_\nu(x) = x^\nu + b_{1,\nu}\, x^{\nu-1} + b_{2,\nu}\, x^{\nu-2} + \ldots\, b_{\nu,\,\nu},$$

assujetti à une sorte d'orthogonalité avec P_{n+1}, de telle manière que

$$(1) \qquad I_n^\nu = 0, \qquad \nu \gtrless n; \qquad I_n^n = 1.$$

En vue de la détermination des $b_{m,\nu}$, nous écrirons

$$(2) \qquad I_n^\nu = K_n^\nu + b_{1,\nu}\, K_n^{\nu-1} + b_{2,\nu}\, K_{n\ldots}^{\nu-2} + b_{\nu,\nu}\, K_n^0$$

en posant

$$\mathrm{K}_n^p = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \frac{x^p}{\mathrm{P}_{n+1}(x)}\,dx. \tag{3}$$

Vérifions d'abord que cette intégrale est une fonction rationnelle entière des coefficients de P_{n+1}. En prenant le cas général où P_{n+1} a $(n+1)$ racines distinctes quelconques $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, l'intégrale est égale à la somme des résidus

$$\mathrm{K}_n^p = \sum_{\mu=1}^{\mu=n+1} \frac{x_\mu^p}{(x_\mu - x_1)(x_\mu - x_2)\ldots(x_\mu - x_{\mu-1})(x_\mu - x_{\mu+1})\ldots(x_\mu - x_{n+1})} \tag{4}$$

où x_{n+1+k} est identique à x_k; en réduisant au même dénominateur, on obtient

$$\mathrm{K}_n^p = \frac{\Delta_p}{\Delta_n}, \tag{5}$$

où Δ_p désigne le déterminant

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} x_1^p & x_2^p & \ldots & x_{n+1}^p \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_{n+1}^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

et où Δ_n s'obtient en remplaçant p par n. Ces déterminants, qui s'annulent évidemment dès que deux des x_μ deviennent égaux, sont bien connus. On voit que Δ_p est divisible par Δ_n : l'intégrale K_n^p est donc une fonction symétrique entière des racines x_μ; elle est une fonction rationnelle entière des coefficients $a_{1,n+1}$, $a_{2,n+1}, \ldots, a_{n+1,n+1}$. Comme on a, évidemment, ainsi qu'on le voit notamment d'après (5),

$$\mathrm{K}_n^p = 0, \qquad p < n; \qquad \mathrm{K}_n^n = 1,$$

les équations déterminant les $b_{m,\nu}$ deviennent

$$\begin{aligned}
&\mathrm{K}_{\nu-1}^\nu + b_{1,\nu} = 0,\\
&\mathrm{K}_{\nu-2}^\nu + b_{1,\nu}\mathrm{K}_{\nu-2}^{\nu-1} + b_{2,\nu} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mathrm{K}_{\nu-\lambda}^\nu + b_{1,\nu}\mathrm{K}_{\nu-\lambda}^{\nu-1} + b_{2,\nu}\mathrm{K}_{\nu-\lambda}^{\nu-2} + \ldots + b_{\lambda,\nu} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

elles donnent successivement $b_{1,\nu}, b_{2,\nu}, \ldots, b_{\nu,\nu}$.

Les K_n^p peuvent s'obtenir de proche en proche. On a en effet, pour chaque racine x_μ,

$$(7) \qquad x_\mu^{n+1} + a_{1,n+1}\, x_\mu^n + a_{2,n+1}\, x_\mu^{n-1} + \ldots + a_{n+1,n+1} = 0.$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, n+1).$$

On a alors

$$\Delta_{n+1} = - a_{1,n+1}\, \Delta_n, \qquad K_n^{n+1} = - a_{1,n+1};$$

puis, en multipliant (7) successivement, car $x_\mu, x_\mu^2, \ldots, x_\mu^{k-1}$,

$$\Delta_{n+2} = - a_{1,n+1}\, \Delta_{n+1} - a_{2,n+1}\, \Delta_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou encore

$$K_n^{n+2} = - a_{1,n+1}\, K_n^{n+1} - a_{2,n+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$K_n^{n+k} = - a_{1,n+1}\, K_n^{n+k-1} - \ldots - a_{n+1,n+1}\, K_n^{k-1}.$$