Bulletin de la S. M. F.

S. Zaremba

Sur la mobilité des solides subissant la contraction de M. Lorentz dans le sens de la vitesse

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 596-601.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__596_0>

SUR LA MOBILITÉ DES SOLIDES SUBISSANT LA CONTRACTION DE M. LORENTZ DANS LE SENS DE LA VITESSE ;

PAR M. S. ZAREMBA.

(Cracovie.)

La théorie de la relativité restreinte se trouve dans une relation si étroite avec l'hypothèse de M. Lorentz, relative à la contraction des solides dans le sens de la vitesse, que cette hypothèse mérite peut-être encore d'être étudiée, bien qu'elle soit abandonnée aujourd'hui.

On a déjà remarqué que l'hypothèse de M. Lorentz donne lieu à des difficultés dans les cas où l'on considère des mouvements qui ne se réduisent pas à des translations rectilignes et uniformes (paradoxe de M. Ehrenfest). Toutefois il ne semble pas que l'on ait jamais fait une étude systématique et rigoureuse du genre de mobilité dont jouirait un solide vérifiant l'hypothèse de M. Lorentz.

J'ose espérer que l'étude de cette question, exposée dans le présent article, rendra service aux personnes qui s'intéressent aux efforts que l'on fait actuellement pour concilier la théorie des phénomènes lumineux dans les corps en mouvement avec les faits observés.

1. M. Lorentz n'a pas présenté un énoncé assez complet de son hypothèse pour que cet énoncé puisse servir de base à un raisonnement rigoureux. Toutefois, en étudiant les applications que l'illustre physicien fait de l'hypothèse précédente ([1]), il est possible de dégager l'énoncé précis de celle-ci.

Observons tout d'abord que M. Lorentz admet la conception traditionnelle du temps et de l'espace ainsi que la rigidité mathémathique de l'éther. Il existera donc un système de coordonnées rectangulaires (X) par rapport auquel l'éther sera au repos. Cela posé, désignons par (S) un solide quelconque et par (S_0) l'en-

---

([1]) Consulter, en particulier, les pages 195 à 202 de l'ouvrage suivant : H.-A. LORENTZ, *The theory of électrons* (Leipzig, 1909, chez B.-G. Teubner).

semble des positions qu'auraient occupé les points physiques du solide (S) au cas où, dans la position (S_0), le solide considéré serait au repos par rapport au système de coordonnées (X). Dans ces conditions l'hypothèse de M. Lorentz consiste en l'attribution au solide (S) des deux propriétés suivantes :

1° Il existe un système de coordonnées rectangulaires (Y) (animé en général d'un certain mouvement par rapport au système X) tel que, par rapport à ce système, chacun des points physiques du solide (S) soit au repos.

2° Les unités étant choisies de façon que la vitesse de la lumière dans l'éther soit représentée par le nombre 1, si l'on désigne par A et B deux points physiques du solide (S), par A_0 et B_0 les points avec lesquels les points A et B se confondraient au cas où le solide (S) se trouverait au repos par rapport au système de coordonnées (X), dans la position (S_0), si l'on porte à partir du point A, sur la droite AB, dans le sens de A vers B, un segment AC ayant le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_0B_0}}$ pour mesure et si l'on désigne par M la position limite du point C lorsque, pour une époque fixe, le segment $\overline{A_0B_0}$ tend vers zéro, le point A_0 restant fixe par rapport au système de coordonnées (X), le lieu du point M sera un ellipsoïde de révolution de centre A ; l'axe de révolution de cet ellipsoïde sera dirigé suivant la vitesse v du point A par rapport au système de coordonnées (X), la moitié a de cet axe sera égale à $\sqrt{1-v^2}$ [1], la moitié de la valeur commune des autres axes étant égale à l'unité.

Peut-être dira-t-on que l'attribution de la première des deux propriétés précédentes aux solides constitue une particularisation

---

[1] Selon M. Lorentz on pourrait poser $a = \varphi(v^2)$, en désignant par $\varphi(v^2)$ une fonction développable suivant les puissances entières et positives de v^2 pour $v^2 < 1$, assujettie seulement à la condition que la somme des deux premiers termes du développement de $\varphi(v^2)$ se réduise à $1 - \frac{1}{2}v^2$; en adoptant l'expression

$$\varphi(v^2) = \sqrt{1-v^2}$$

de $\varphi(v^2)$ j'ai choisi celle qui met le plus simplement en évidence la relation qui subsiste entre l'hypothèse de M. Lorentz et la théorie de la relativité restreinte.

arbitraire de l'hypothèse de M. Lorentz, hypothèse dont l'expression adéquate consisterait en la simple attribution aux solides de la seconde propriété.

En réalité, cette objection ne serait pas fondée car dans toutes les applications de l'hypothèse de M. Lorentz à l'explication des faits observés, on admet plus ou moins explicitement, mais toujours d'une façon indubitable, qu'il correspond à chacun des solides que l'on a à envisager et en particulier à *la terre*, un système de coordonnées par rapport auquel chacun des points physiques du solide considéré est au repos; j'ajoute que, si l'on voulait réduire l'hypothèse de M. Lorentz à la simple attribution aux solides de la seconde des deux propriétés énoncées plus haut, on ne pourrait passer aux applications qu'après une étude préalable de la cinématique des solides de ce genre; or cette étude n'a jamais été faite et il ne semble pas qu'il soit aisé de la mener à bonne fin.

2. Examinons maintenant quelle serait la nature du mouvement dont pourrait être animé un solide vérifiant l'hypothèse de M. Lorentz. A cet effet conservons les notations dont nous nous sommes servis pour énoncer cette hypothèse, considérons un point physique quelconque P du solide (S); désignons ensuite par y_1, y_2, y_3 les coordonnées de ce point dans le système des coordonnées (Y), par P_0 le point avec lequel le point P se confondrait si le solide (S) se trouvait dans la position (S_0), au repos par rapport au système de coordonnées (X), et par x_1, x_2, x_3 les coordonnées du point P_0 dans le système de coordonnées (X).

En se reportant à l'énoncé de l'hypothèse de M. Lorentz, on reconnaîtra de suite qu'il existera une relation biunivoque, *indépendante du temps*, entre la position du point P_0 par rapport au système de coordonnées (X) et celle du point P par rapport au système de coordonnées (Y). Nous aurons donc

$$x_i = f_i(y_1, y_2, y_3) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

en désignant par les $f_i(y_1, y_2, y_3)$ des fonctions des variables y_1, y_2, y_3, *indépendantes du temps* et bien déterminées dans le domaine (S_0).

Nous admettrons, comme on le fait habituellement dans les recherches du genre de celle qui nous occupe, que chacune des fonctions $f_i(y_1, y_2, y_3)$ admet des dérivées premières continues. Nous aurons donc

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{3} dx_i^2 = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\, dy_i\, d_k \qquad (a_{ik} = a_{ki}),$$

où les a_{ik} seront des fonctions bien déterminées et continues des variables y_1, y_2, y_3, indépendantes du temps. D'autre part, si l'on désigne par v_1, v_2, v_3 les projections orthogonales sur les axes du système (Y) de la vitesse v du point P par rapport au système de coordonnées (X), l'hypothèse de M. Lorentz nous donnera

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{3} dx_i^2 = \sum_{i=1}^{3} dy_i^2 + \frac{1}{1-v^2}\left(\sum_{k=1}^{3} v_k\, dy_k\right)^2.$$

D'ailleurs, en vertu d'un théorème classique, on a

$$(4) \qquad v_k = u_k + p_{k+1}\, y_{k+2} - p_{k+2}\, y_{k+1} \qquad (k = 1, 2, 3),$$

où les u_i et les p_i $(i = 1, 2, 3)$ représentent des quantités indépendantes des variables y_1, y_2, y_3 et où, bien entendu, on admet que, pour $i \equiv k \pmod 3$, on a $p_i = p_k$.

En identifiant les expressions (2) et (3) de la somme $\sum_{i=1}^{3} dx_i^2$ et en s'appuyant sur la remarque faite plus haut et d'après laquelle les a_{ik} ne dépendent pas du temps, on s'assure que les v_k ne dépendent pas du temps non plus.

Cela posé, il résulte des formules (4) que les quantités u_i et les p_i, indépendantes des y, sont aussi indépendantes du temps; ces quantités se réduisent donc à des constantes. Cela étant, on pourra choisir le système de coordonnées (Y) de façon à avoir

$$u_1 = u_2 = p_1 = p_2 = 0, \qquad u_3 = u, \qquad p_3 = \omega,$$

où u et ω représentent des constantes.

Avec le choix précédent du système de coordonnées (Y), la formule (3) prendra la forme suivante :

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{3} dx_i^2 = \sum_{i=1}^{3} dy_i^2 + \frac{1}{1-v^2}\left(-\omega y_2\, dy_1 + \omega y_1\, dy_2 + u\, dy_3\right)^2.$$

Je dis que les équations (1) font correspondre une droite (d) à l'axe des y_3 du système de coordonnées (Y). En effet, il est aisé de voir que l'axe des y_3 est une géodésique du ds^2 que représente le second membre de l'égalité (5). Donc, les équations (1) font correspondre à cet axe une géodésique du ds^2 que représente le premier membre de (5). Il suffit maintenant de considérer que toutes les géodésiques de ce ds^2 sont des droites pour reconnaître l'exactitude de la proposition qu'il s'agissait d'établir.

Voici maintenant une seconde remarque que l'on démontrera par la même méthode : à toute droite (b) perpendiculaire à l'axe des y_3 du système de coordonnées (Y) et située dans un même plan avec cet axe, les équations (1) font correspondre une certaine droite (a) [qui évidemment coupe la droite (d)]. Mais il convient de compléter cette remarque de la façon suivante : Tout d'abord il résulte immédiatement de l'équation (5) qu'à tout segment situé sur la droite (b), les équations (1) font correspondre un segment *égal*, situé sur la droite (a). Cela posé, j'ajoute que la droite (a) est perpendiculaire à la droite désignée plus haut par (d). En effet, désignons par B_1 un point de la droite (b), non situé sur l'axe des y_3, et par B_2 le point d'intersection de cet axe avec la droite (b). Désignons en outre par A_1 et A_2 les points que les équations (1) font correspondre aux points B_1 et B_2.

Avec un peu d'attention on s'assurera que le point B_2 est le point de l'axe des y_3 dont la distance géodésique au point B_1, relative au ds^2 que représente le second membre de l'équation (5), est la plus petite. Par conséquent le point A_2 est le point de la droite (d) dont la distance au point A_1 est la plus petite. Donc, la droite (a) est bien perpendiculaire à la droite (d).

Considérons maintenant le cercle de rayon R représenté dans le système de coordonnées (Y) par le système d'équations

$$(6)\qquad y_1 = \mathrm{R}\cos\theta, \qquad y_2 = \mathrm{R}\sin\theta, \qquad y_3 = \text{const.},$$

le domaine du paramètre θ étant défini par les relations

$$(7)\qquad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi.$$

Avec les valeurs (6) de y_1, y_2, y_3 et le domaine (7) pour le paramètre θ, les équations (1) représenteront une courbe fermée de Jordan (C) sans points doubles et il résulte de l'équation (5) que la longueur L de cette courbe sera donnée par la formule

$$L = 2\pi R \sqrt{1 + \frac{\omega^2 R^2}{1 - v^2}}. \tag{8}$$

Mais il résulte des remarques faites plus haut que la courbe (C) sera en réalité un cercle de rayon R. Par conséquent, la formule (8) doit se réduire à la suivante

$$L = 2\pi R.$$

Cela prouve que, nécessairement, on a

$$\omega = 0.$$

Donc, en définitive, nous arrivons à la conclusion suivante :

Lorsqu'un solide vérifie l'hypothèse de M. Lorentz et n'est pas au repos par rapport à l'éther, il est animé, par rapport à celui-ci, d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme.