

BULLETIN DE LA S. M. F.

R. BAIRE

Sur l'origine de la notion de semi-continuité

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 141-142.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__141_0

© Bulletin de la S. M. F., 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ORIGINE DE LA NOTION DE SEMI-CONTINUITÉ;

PAR M. RENÉ BAIRE.

Puisque la notion de semi-continuité a été utilisée dans plusieurs branches de l'Analyse, étude des discontinuités des fonctions, intégration, calcul des variations, théorie du potentiel, ceux qui aiment connaître l'origine des notions mathématiques apprendront peut-être avec intérêt dans quelles circonstances j'ai été amené à cette idée.

Je me proposais (fin 1896) d'étudier les fonctions de deux variables continues par rapport à chacune d'elles sans l'être par rapport à leur ensemble. Soient une telle fonction $f(x, y)$ et un rectangle de côtés parallèles aux axes. Sur le segment du rectangle parallèle à l'axe des y , d'abscisse x_0 , la fonction $f(x_0, y)$, continue par rapport à y , admet un maximum qui est fonction de x_0 ; soit $M(x_0)$. Elle l'atteint en un point (x_0, y_0) . La fonction $f(x, y_0)$, en tant que fonction de x , est continue; elle prend, dans le voisinage de la valeur x_0 , des valeurs voisines de $M(x_0)$, donc supérieures à $M(x_0) - \varepsilon$, ε étant arbitrairement petit et positif. Par conséquent, si $|h|$ est assez petit, le nombre $M(x_0 + h)$, qui n'est pas inférieur à $f(x_0 + h, y_0)$, est supérieur ou égal à $M(x_0) - \varepsilon$.
L'inégalité

$$M(x_0 + h) \geq M(x_0) - \varepsilon$$

est vérifiée pour $|h| < \alpha$, α étant un certain nombre positif.

La fonction $M(x)$ possède ainsi l'une des deux propriétés dont l'ensemble constitue la continuité; je l'ai appelée la *semi-continuité inférieure*.

On a donc la proposition suivante :

Si $f(x, y)$ est, dans un rectangle parallèle aux axes, continue par rapport à chacune des variables, la borne supérieure des valeurs de $f(x, y)$ sur un segment du rectangle parallèle à Oy est, en tant que fonction de x , semi-continue inférieurement.

D'ailleurs, cette fonction $M(x)$ n'est pas nécessairement continue : il suffit de considérer la fonction $f(x, y)$ définie par les égalités

$$f(x, y) = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0,$$
$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad \text{pour} \quad 0 < |x| \leq 1, \quad 0 < |y| \leq 1.$$

On a

$$M(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \neq 0,$$
$$M(0) = 0.$$

Des propositions analogues s'obtiennent en permutant x et y , ou en considérant le minimum au lieu du maximum.

Ces propositions ne paraissent pas présenter un grand intérêt par elles-mêmes; je ne les ai jamais publiées; c'est d'une façon tout à fait différente que j'ai utilisé par la suite la notion de semi-continuité pour la solution du problème rappelé plus haut (voir ma Thèse).

Ce que j'ai voulu indiquer ici, c'est que je n'ai pas eu *a priori* l'idée de disjoindre les deux inégalités de la continuité, j'y ai été conduit par l'examen d'une fonction qui s'introduisait naturellement dans mes recherches et dont j'ai observé la propriété de semi-continuité.
