BULLETIN DE LA S. M. F.

M. JANET

Sur la composition des expressions différentielles linéaires et une application à la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 89-91.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__89_0>

SUR LA COMPOSITION DES EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET UNE APPLICATION A LA THÉORIE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ;

Par M. MAURICE JANET.

1. Appelons « expression différentielle linéaire d'ordre p en u » toute somme de la forme

$$\varphi(u) = \sum_{\alpha} a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

où les a sont des fonctions des x, et où

$$0 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leqq p.$$

Une telle expression correspond à un polynome d'ordre p à n variables, dont les coefficients dépendent de n paramètres. Nous poserons

$$\Sigma a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\alpha_2} \ldots \omega_n^{\alpha_n} = \overline{\varphi}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n; x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Soient donnés les polynomes $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ correspondant à deux expressions différentielles linéaires φ, ψ. *Comment obtiendra-t-on le polynome correspondant à* $\psi(\varphi)$? Quand $\overline{\psi}$ se réduit à $\omega_1^{\beta_1} \omega_2^{\beta_2} \ldots \omega_n^{\beta_n}$, la réponse résulte immédiatement de la formule de Leibnitz qui donne la dérivée d'un produit

$$(1) \quad \overline{\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n} \varphi}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}} = \sum_{\alpha} \Bigg[\sum_{\rho} C_{\beta_1}^{\rho_1} C_{\beta_2}^{\rho_2} \ldots C_{\beta_n}^{\rho_n} \frac{\partial^{\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_n} a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}}{\partial x_1^{\rho_1} \partial x_2^{\rho_2} \ldots \partial x_n^{\rho_n}} \times \omega_1^{\alpha_1+\beta_1-\rho_1} \omega_2^{\alpha_2+\beta_2-\rho_2} \ldots \omega_n^{\alpha_n+\beta_n-\rho_n} \Bigg],$$

où $\sum_{\rho}$ indique qu'il faut donner aux ρ tous les systèmes de valeurs entières telles que pour chaque i on ait

$$0 \leqq \rho_i \leqq \beta_i$$

et où $\sum\limits_{\alpha}$ a le même sens que dans l'expression de φ. On peut écrire la formule précédente

$$(1)' \quad \overline{\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}\varphi}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}} = \sum_{\rho} C_{\beta_1}^{\rho_1} C_{\beta_2}^{\rho_2} C_{\beta_n}^{\rho_n}\,\omega_1^{\beta_1-\rho_1}\omega_2^{\beta_2-\rho_2}\ldots\omega_n^{\beta_n-\rho_n}\frac{\partial^{\rho_1+\ldots+\rho_n}\overline{\varphi}}{\partial x_1^{\rho_1}\ldots\partial x_n^{\rho_n}}$$

$$= \sum_{\rho}\frac{1}{\rho_1!\,\rho_2!\ldots\rho_n!}\,\frac{\partial^{\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_n}(\omega_1^{\beta_1}\omega_2^{\beta_2}\ldots\omega_n^{\beta_n})}{\partial\omega_1^{\rho_1}\partial\omega_2^{\rho_2}\ldots\partial\omega_n^{\rho_n}} \times \frac{\partial^{\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_n}\overline{\varphi}}{\partial x_1^{\rho_1}\ldots\partial x_n^{\rho_n}}.$$

Si d'ailleurs un des ρ était supérieur au β de même indice, le terme correspondant s'annulerait de lui-même; on peut donc étendre le signe Σ à tous les systèmes de valeurs positives (ou nulles) des ρ.

Si $\overline{\psi} = \Sigma b_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}\omega_1^{\beta_1}\omega_2^{\beta_2}\ldots\omega_n^{\beta_n}$, il suffira, pour obtenir l'expression de $\overline{\psi(\varphi)}$ de multiplier par $b_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}$ le premier et le dernier membre de l'équation (1)' et de faire la somme de toutes les expressions analogues.

D'où la formule simple :

$$(2) \qquad \overline{\psi(\varphi)} = \sum_{\rho}\frac{1}{\rho_1!\,\rho_2!\ldots\rho_n!}\,\frac{\partial^{\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_n}\overline{\psi}}{\partial\omega_1^{\rho_1}\partial\omega_2^{\rho_2}\ldots\partial\omega_n^{\rho_n}}\,\frac{\partial^{\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_n}\overline{\varphi}}{\partial x_1^{\rho_1}\partial x_2^{\rho_2}\ldots\partial x_n^{\rho_n}}.$$

2. Considérons maintenant un système quelconque d'équations aux dérivées partielles à une inconnue, *linéaire* sans seconds membres. On peut déduire de ces équations, par dérivations, multiplications par fonctions des variables, et additions, une infinité d'équations (E) conséquences du système [1].

Considérons l'ensemble des termes d'ordre le plus élevé de l'une quelconque de ces équations; cet ensemble $X(u)$ correspond à un certain polynome homogène en ω, $\overline{X}$. Il est clair que toutes ces formes $\overline{X}$ constituent un module. C'est un module [2] de formes

---

[1] Les équations données sont bien entendu comprises dans les (E).

[2] On dit qu'un système de formes en $\omega_1\omega_2\ldots\omega_n$, à coefficients fonctions de x_1, $x_2, \ldots, x_n$ constitue un module si, quelles que soient les formes $F_1, F_2, \ldots F_k$ du système, toute forme $A_1F_1 + A_2F_2 + \ldots + A_kF_k$ où les A sont des formes en ω à coefficients fonctions de x, fait aussi partie du système.

en ω, *dont les coefficients sont des fonctions des* x. Mais *ce n'est pas un module quelconque* de cette espèce. Nous allons démontrer en effet que *si* $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ *sont deux formes quelconques du module la forme*

$$\sum\left(\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\omega_i}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_i}-\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\omega_i}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x_i}\right)$$

appartient au module.

$\overline{\Phi}$ est l'ensemble des termes d'ordre le plus élevé p d'une certaine expression différentielle linéaire φ déduite par dérivations, multiplications par fonctions des x, additions, des premiers membres des équations données. On en peut dire autant en remplaçant respectivement $\overline{\Phi}$, φ, p dans la phrase précédente par $\overline{\Psi}$, ψ, q.

L'équation $\psi(\varphi)-\varphi(\psi)=0$ fait nécessairement partie des équations (E). Il est clair que cette équation est au plus d'ordre $p+q-1$. L'ensemble des termes d'ordre $p+q-1$ de $\overline{\psi(\varphi)}$ est d'ailleurs le même d'après la formule (2) que l'ensemble des termes d'ordre $p+q-1$ de

$$\overline{\psi}\,\overline{\varphi}+\sum\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\omega_i}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_i}$$

et par suite l'ensemble des termes d'ordre $p+q-1$ de $\overline{\psi(\varphi)-\varphi(\psi)}$ est le même que celui des termes d'ordre $p+q-1$ de

$$\sum\left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\omega_i}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_i}-\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\omega_i}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_i}\right),$$

mais $\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_i}$ est d'ordre $q-1$, $\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\omega_i}$ d'ordre p.

L'ensemble des termes d'ordre $p+q-1$ de $\overline{\psi(\varphi)-\varphi(\psi)}$ est donc

$$\sum\left(\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\omega_i}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_i}-\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\omega_i}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x_i}\right).$$

Cela suffit à établir la proposition annoncée.

Cette démonstration est à rapprocher de celle qui a permis à M. Günther de prouver que le système d'équations du *premier ordre*, auquel doivent satisfaire les multiplicités caractéristiques à $n-1$ dimensions d'un système d'équations aux dérivées partielles *quelconque*, est, en général, *complètement intégrable.*