

BULLETIN DE LA S. M. F.

POTRON

Sur l'irréductibilité des polynômes à plusieurs variables

Bulletin de la S. M. F., tome 60 (1932), p. 127-128.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1932__60__127_0

© Bulletin de la S. M. F., 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'IRRÉDUCTIBILITÉ DES POLYNOMES A PLUSIEURS VARIABLES;

PAR M. POTRON.

Dans son Mémoire sur l'irréductibilité des polynomes à coefficients entiers (1), M. Hilbert a établi le théorème suivant :

Si un polynome à n variables $P(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$, à coefficients entiers, est irréductible (c'est-à-dire n'est pas produit de plusieurs polynomes à coefficients entiers), il est possible, d'une infinité de manières, de donner à x_1, \dots, x_k des valeurs entières a_1, \dots, a_k telles que le polynome à $n - k$ variables

$$P(a_1, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = P_1(x_{k+1}, \dots, x_n)$$

soit irréductible.

M. Hilbert démontre d'abord le théorème dans le cas de deux variables : *si un polynome à deux variables et coefficients entiers $P(x, y)$ est irréductible, on peut donner à x une infinité de valeurs entières a telles que le polynome à une variable et coefficients entiers $P(a, y) = Q(y)$ soit irréductible.*

Je me propose de montrer que l'on peut très simplement étendre ce théorème au cas de plusieurs variables par l'application d'un procédé de Kronecker (2), qui permet de représenter un polynome à plusieurs variables par un polynome à une variable.

On peut considérer le polynome $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ comme un polynome en x_2, \dots, x_m dont les coefficients sont des polynomes en x_1 , à coefficients entiers, soit

$$P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum p_\alpha(x_1) x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}.$$

Soit alors t un entier supérieur à la plus grande des sommes

(1) *Crelle*, t. 110, 1892, p. 104-139.

(2) *Crelle*, t. 92, 1882, p. 10-13.

$\alpha_1 + \dots + \alpha_m$, si l'on remplace x_i par $y^{t^{m-i}}$ ($i = 2, \dots, m$), et si l'on désigne par α l'expression $\alpha_2 t^{m-2} + \alpha_3 t^{m-3} + \dots + \alpha_m$, on obtient

$$P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \Sigma p_\alpha(x_1) y^\alpha = p(x_1, y),$$

les coefficients du polynome p étant entiers. D'après le théorème établi dans le cas de deux variables, on peut donner à x_1 une infinité de valeurs entières a_1 telles que $p(a_1, y)$ soit irréductible. Comme à toute décomposition de $P(a_1, x_2, \dots, x_m)$ correspond une décomposition de $p(a_1, y)$, le polynome

$$P(a_1, x_2, \dots, x_m) = P_1(x_2, x_3, \dots, x_m)$$

sera irréductible.

On voit de même qu'il existe une infinité de valeurs entières a_2 telles que le polynome

$$P_1(a_2, x_3, \dots, x_m) = P_2(x_3, \dots, x_m)$$

soit irréductible; et ainsi de suite.

Indépendamment de la simplification apportée à la démonstration d'un important théorème, la méthode indiquée présente l'avantage de restreindre au minimum l'emploi des développements en série des racines. Il n'y a plus à les utiliser que dans la démonstration du théorème pour un polynome à deux variables; et il suffit alors d'utiliser les développements des racines par rapport à un seul paramètre.
