BULLETIN DE LA S. M. F.

POTRON

Sur l’irréductibilité des polynômes à plusieurs variables

Bulletin de la S. M. F., tome 60 (1932), p. 127-128.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1932__60__127_0>

SUR L'IRRÉDUCTIBILITÉ DES POLYNOMES A PLUSIEURS VARIABLES;

PAR M. POTRON.

Dans son Mémoire sur l'irréductibilité des polynomes à coefficients entiers [1], M. Hilbert a établi le théorème suivant :

Si un polynome à n variables $P(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, *à coefficients entiers, est irréductible* (c'est-à-dire n'est pas produit de plusieurs polynomes à coefficients entiers), *il est possible, d'une infinité de manières, de donner à* $x_1, \ldots, x_k$ *des valeurs entières* $a_1, \ldots, a_k$ *telles que le polynome à* $n-k$ *variables*

$$P(a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) = P_1(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

soit irréductible.

M. Hilbert démontre d'abord le théorème dans le cas de deux variables : *si un polynome à deux variables et coefficients entiers* $P(x, y)$ *est irréductible, on peut donner à* x *une infinité de valeurs entières* a *telles que le polynome à une variable et coefficients entiers* $P(a, y) = Q(y)$ *soit irréductible.*

Je me propose de montrer que l'on peut très simplement étendre ce théorème au cas de plusieurs variables par l'application d'un procédé de Kronecker [2], qui permet de représenter un polynome à plusieurs variables par un polynome à une variable.

On peut considérer le polynome $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ comme un polynome en $x_2, \ldots, x_m$ dont les coefficients sont des polynomes en x_1 à coefficients entiers, soit

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma p_\alpha(x_1) x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}.$$

Soit alors t un entier supérieur à la plus grande des sommes

---

(1) *Crelle*, t. 110, 1892, p. 104-139.

(2) *Crelle*, t. 92, 1882, p. 10-13.

$\alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, si l'on remplace x_i par $y^{t^{m-i}}$ $(i = 2, \ldots, m)$, et si l'on désigne par α l'expression $\alpha_2 t^{m-2} + \alpha_3 t^{m-3} + \ldots + \alpha_m$, on obtient

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Sigma p_\alpha(x_1) y^\alpha = p(x_1, y),$$

les coefficients du polynome p étant entiers. D'après le théorème établi dans le cas de deux variables, on peut donner à x_1 une infinité de valeurs entières a_1 telles que $p(a_1, y)$ soit irréductible. Comme à toute décomposition de $P(a_1, x_2, \ldots, x_m)$ correspond une décomposition de $p(a_1, y)$, le polynome

$$P(a_1, x_2, \ldots, x_m) = P_1(x_2, x_3, \ldots, x_m)$$

sera irréductible.

On voit de même qu'il existe une infinité de valeurs entières a_2 telles que le polynome

$$P_1(a_2, x_3, \ldots, x_n) = P_2(x_3, \ldots, x_m)$$

soit irréductible; et ainsi de suite.

Indépendamment de la simplification apportée à la démonstration d'un important théorème, la méthode indiquée présente l'avantage de restreindre au minimum l'emploi des développements en série des racines. Il n'y a plus à les utiliser que dans la démonstration du théorème pour un polynome à deux variables; et il suffit alors d'utiliser les développements des racines par rapport à un seul paramètre.