

BULLETIN DE LA S. M. F.

ALEXANDRE DINGHAS

**Sur une généralisation du théorème de
Denjoy-Carleman-Ahlfors**

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 216-219.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__216_0

© Bulletin de la S. M. F., 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME
DE DENJOY-CARLEMAN-AHLFORS;

PAR M. ALEXANDRE DINGHAS.

(Berlin.)

1. Dans une Note publiée récemment dans le *Mathematische Zeitschrift* ⁽¹⁾, nous avons montré comment une modification légère de la méthode différentielle de Carleman ⁽²⁾, permet d'obtenir d'une manière fort élégante une inégalité analogue à celle que Milloux a donné dans un travail publié dans les *Acta Mathematica* ⁽³⁾ en utilisant le *Verzerrungssatz* bien connu de Ahlfors.

Dans le cours de recherches engagées dans une toute autre direction, je suis arrivé avec cette même méthode de Carleman convenablement modifiée à une extension du théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors pour les fonctions entières à « croissance régulière » en répondant ainsi en partie à une question que j'ai posée dans un travail antérieur ⁽⁴⁾.

2. Soit $f(z)$ une fonction entière dans un domaine B limité par deux courbes C_1, C_2 issues du point $z = 0$, sans points communs et s'étendant à l'infini. Désignons par s_r l'arc du cercle $|z| = r$ compris entre C_1, C_2 et appartenant à B, par θ_r l'angle correspondant et enfin par $s(r), \theta(r)$ leurs grandeurs respectives. La

⁽¹⁾ A. DINGHAS, *Bemerkungen zu einer Differentialungleichung von Carleman*, (*Mathematische Zeitschrift*, Bd. 41, 1936, p. 713).

⁽²⁾ CARLEMAN, *Sur une inégalité différentielle dans la théorie des fonctions analytiques* (*C. R. Acad. Sc. Paris*, 196, 1933, p. 995-997).

⁽³⁾ MILLOUX, *Sur les domaines de détermination infinie des fonctions entières* (*Acta Mathematica*, 61, 1933, p. 105-134).

⁽⁴⁾ A. DINGHAS, *Über einen Satz von Phragmen-Lindelöf* (*Mathematische Zeitschrift*, Bd. 39, 1934, p. 455-461).

fonction $f(z)$ soit telle que sur C_1, C_2 l'inégalité

$$(2.1) \quad \log |f(z)| \leq \log \gamma(r) = r^{\rho'} \quad (\rho' > 0)$$

soit vérifiée, tandis que à l'intérieur de B on ait au moins pour un z de l'arc

$$(2.2) \quad |f(z)| > \gamma(r) \quad (r \geq r_0).$$

Nous définirons comme fonction caractéristique de $f(z)$ dans le domaine B l'intégrale

$$T(r, B) = \frac{1}{\theta(r)} \int_{0_r}^+ \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Considérons maintenant la fonction

$$m(r, \gamma) = \int_{0_r}^+ \left(\log \frac{|f(re^{i\varphi})|}{\gamma(r)} \right)^2 d\varphi.$$

Nous avons

$$\frac{m'}{2} = \int_{0_r} \Phi \Phi_r d\varphi \quad \text{et} \quad \frac{m''}{2} = \int_{0_r} (\Phi \Phi_{rr} + \Phi_r^2) d\varphi,$$

où nous avons posé

$$\log \frac{|f(re^{i\varphi})|}{\gamma(r)} = \Phi(r, \varphi) = \Phi.$$

Soit E l'ensemble des points du domaine B où l'inégalité (2.2) est vérifiée et E' l'ensemble complémentaire. Pour E on aura

$$\Delta \Phi = -\Delta \log \gamma(r)$$

tandis que pour E'

$$\Delta \Phi = 0,$$

donc en tous les cas

$$\Delta \Phi = \Phi_{rr} + \frac{\Phi_r}{r} + \frac{\Phi_{\varphi\varphi}}{r^2} \geq -\Delta \log \gamma(r).$$

Par des calculs très faciles en utilisant les deux inégalités

$$\int_{0_r} \Phi_r^2 d\varphi \geq \frac{1}{4} \frac{m'^2}{m} \quad \text{et} \quad \int_{0_r} \Phi_{\varphi}^2 d\varphi \geq \frac{\pi^2}{\theta^2(r)} \int_{0_r} \Phi^2 d\varphi \quad (1),$$

(1) *Loc. cit.* p. 714.

on arrive à la relation

$$(2.3) \quad \frac{m''}{2} + \frac{m'}{2r} - \frac{1}{4} \frac{m'^2}{m} \geq \frac{\pi^2}{s^2(r)} m - \Delta \log \gamma(r) \int_{0_r} \Phi d\varphi.$$

D'autre part on tire de l'inégalité de Schwarz

$$(2.4) \quad \left(\frac{1}{\theta(r)} \int_{0_r} \Phi d\varphi \right)^2 \leq \frac{m(r)}{\theta(r)},$$

on aura alors *a fortiori*

$$(2.5) \quad \frac{m''}{2m} + \frac{m'}{2rm} - \frac{1}{4} \left(\frac{m'}{m} \right)^2 \geq \frac{\pi^2}{s^2(r)} - \sqrt{\frac{\theta(r)}{m(r)}} \Delta \log \gamma(r).$$

Maintenant par un raisonnement très simple, on peut démontrer l'inégalité

$$\frac{1}{\theta(r)} \int_{0_r} \Phi d\varphi = \frac{1}{\theta(r)} \int_{0_r}^+ \log \frac{|f(re^{i\varphi})|}{\gamma(r)} d\varphi \geq \frac{1}{\theta(r)} \int_{0_r}^+ \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi - \log \gamma(r),$$

pourvu qu'on ait $\gamma(r) \geq e$. Cette inégalité combinée avec (2.4) donne

$$(2.6) \quad \sqrt{\frac{m(r)}{\theta(r)}} \geq T(r, B) - \log \gamma(r).$$

Des formules (2.5) et (2.6), il résulte enfin

$$(2.7) \quad \frac{m''}{2m} + \frac{m'}{2rm} - \frac{1}{4} \left(\frac{m'}{m} \right)^2 \geq \frac{\pi^2}{s^2(r)} - \frac{\Delta \log \gamma(r)}{T(r, B) - \log \gamma(r)},$$

le membre droit de (2.6) étant supposé positif.

3. Nous dirons maintenant que la fonction entière d'ordre fini $\rho > \frac{1}{2}$ dans le domaine B soit à croissance régulière, si pour tout $\frac{1}{2} < \rho' < \rho$, on a

$$(3.1) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, B)}{r^{\rho'}} = \infty.$$

Nous supposons encore, que

$$(3.2) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r \theta(r) > 0.$$

En premier lieu, nous tirons de la formule (2.7) pour $r \geq r_0$,

$$(3.3) \quad m'' + \frac{m'}{r} > 0,$$

c'est-à-dire

$$rm'' + m' = (rm')' > 0.$$

Donc rm' est une fonction croissante de r et ne peut s'annuler qu'une fois. En combinant (2.6) et la condition (3.2), on peut voir aisément que $m(r)$ croît plus vite que r^ε , $\varepsilon > 0$. Il en résulte que

$$(3.4) \quad m' > 0$$

pour r suffisamment grand. On peut alors écrire

$$(3.5) \quad \left\{ \frac{m^2}{2m} + \frac{m'}{2rm} - \frac{1}{4} \left(\frac{m'}{m} \right)^2 \right\} = 2 \frac{m'}{m} \left(\frac{m''}{m'} + \frac{1}{r} \right) - \left(\frac{m'}{m} \right)^2 \leq \left(\frac{m''}{m'} + \frac{1}{r} \right)^2.$$

En tirant la racine carrée, on aura de (2.7) pour r grand,

$$\left| \frac{m''}{m'} + \frac{1}{r} \right| \geq \frac{2\pi}{s(r)} [1 + o(1)],$$

ou par (3.3) et (3.4),

$$(3.6) \quad \frac{d}{dr} \left(\log r \frac{d}{dr} m(r, \gamma) \right) \geq \frac{2\pi}{s(r)} [1 + o(1)].$$

Deux intégrations successives et un calcul analogue à celui que j'ai utilisé dans ma Note de *Math. Zeitschrift* donnent la relation

$$(3.7) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\log r} \int_{r_0}^r \frac{dt}{s(t)} \leq \rho.$$

qui généralise les théorèmes de Lindelöf et de Milloux (1), pour la classe des fonctions entières à « croissance régulière ».

C'est enfin un procédé trop classique pour qu'il soit reproduit ici, qui permet de démontrer en partant de (2.6) le théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors sous la forme suivante : *supposons qu'une fonction entière $f(z)$ vérifie sur n courbes issues du point $z = 0$ sans points communs et s'étendant à l'infini les inégalités (2.1), (2.2), tandis que dans chacun des domaines B_1, B_2, \dots, B_n limités par deux courbes consécutives la fonction $f(z)$ soit à croissance régulière au sens de (3.1). Alors on aura encore*

$$n \leq 2\rho.$$

(1) MILLOUX, *loc. cit.* p. 114.