

# BULLETIN DE LA S. M. F.

ERWIN FELDHEIM

## Un problème de la théorie élémentaire des nombres

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 66 (1938), p. 1-7.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1938\\_\\_66\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1938__66__1_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**BULLETIN**  
DE LA  
**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

---

**UN PROBLÈME DE LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES NOMBRES;**

PAR M. ERVIN FELDHEIM

(Budapest).

Nous nous proposons de déterminer tous les triangles rectangles, de côtés mesurés par les nombres entiers  $a$ ,  $b$  et  $c$ , tels que  $a$  et  $b$  soient deux entiers consécutifs. Nous établirons d'abord le

**THÉORÈME.** — *Tout nombre dont le carré se compose des carrés de deux entiers consécutifs est égal à la somme des carrés de trois nombres entiers dont deux, au moins, sont consécutifs.*

La démonstration de cette proposition nous fournira une méthode pour la détermination des nombres cherchés, et nous permettra d'établir des relations de récurrence, et même des expressions explicites générales, pour les entiers  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

Il est connu que les nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  formant un triangle rectangle, c'est-à-dire vérifiant la relation

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

peuvent être représentés sous la forme suivante :

$$a = x^2 - y^2, \quad b = 2xy, \quad c = x^2 + y^2.$$

Pour démontrer notre théorème, nous devons distinguer deux cas

a. Supposons que  $a + 1 = b$ , c'est-à-dire

$$x^2 - y^2 + 1 = 2xy,$$

d'où

$$y = -x + \sqrt{2x^2 + 1}.$$

Le nombre  $2x^2 + 1$  sera un carré parfait si l'on prend

$$x^2 = u^2 + (u + 1)^2.$$

Alors

$$2x^2 + 1 = (2u + 1)^2 \quad \text{et} \quad y = 2u + 1 - x.$$

Finalement

$$c = x^2 + y^2 = u^2 + (u + 1)^2 + (2u + 1 - x)^2,$$

avec

$$x^2 = u^2 + (u + 1)^2.$$

Cela démontre notre proposition :  $c$  est la somme de trois carrés, dont deux carrés de nombres consécutifs. Cherchons si tous les trois entiers peuvent être consécutifs.

On a

$$2u + 1 - x = u - 1 \quad \text{si} \quad x = u + 2,$$

donc

$$(u - 3)(u + 1) = 0.$$

On en tire

$$u = 3, \quad x = 5, \quad y = 2; \quad c = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 29, \quad 29^2 = 20^2 + 21^2.$$

Si l'on fait ensuite

$$2u + 1 - x = u + 2,$$

il vient

$$x = u - 1,$$

donc

$$u(u + 4) = 0.$$

On en tire

$$u = 0, \quad x = -1, \quad y = 2; \quad c = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5, \quad 5^2 = 3^2 + 4^2.$$

*b.* Considérons maintenant le cas  $a - 1 = b$ , ou

$$x^2 - y^2 - 1 = 2xy,$$

d'où

$$x = y + \sqrt{2y^2 + 1}.$$

Posons ici encore

$$y^2 = v^2 + (v + 1)^2,$$

alors

$$x = 2v + 1 + y.$$

Ainsi

$$c = v^2 + (v + 1)^2 + (2v + 1 + y)^2,$$

avec

$$y^2 = v^2 + (v + 1)^2.$$

Si l'on veut avoir

$$2v + 1 + y = v + 2,$$

on aura

$$y + v = 1, \quad \text{d'où } y = 1, \quad v = 0.$$

Nous retrouvons le résultat  $c = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$  du cas précédent.

Nous voyons que, dans le cas  $a$ , le composant  $x$ , dans le cas  $b$ , le composant  $y$  de  $c$  est de même nature que le nombre  $c$  : son carré est la somme des carrés de deux nombres consécutifs. Nous obtenons donc les nombres  $c$  consécutifs en prenant successivement pour  $x$  et  $y$  les nombres  $c$  précédemment calculés.

Numérotions les nombres  $c$  dans l'ordre croissant par  $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ , de même que tous les nombres figurant dans les développements qui précèdent. Ainsi

$$(1) \quad c_n = x_n^2 + y_n^2, \quad a_n = x_n^2 - y_n^2, \quad b_n = 2x_n y_n \quad \text{et} \quad c_n^2 = a_n^2 + b_n^2.$$

Illustrons par quelques exemples ce que nous venons de dire :

$$\begin{aligned} x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = 1 &= 0^2 + 0^2 + 1^2, \\ x_1 = 2, \quad y_1 = 1, \quad a_1 = 3, \quad b_1 = 4, \quad c_1 = 5 &= 0^2 + 1^2 + 2^2, \\ x_2 = 5, \quad y_2 = 2, \quad a_2 = 21, \quad b_2 = 20, \quad c_2 = 29 &= 2^2 + 3^2 + 4^2, \\ x_3 = 12, \quad y_3 = 5, \quad a_3 = 119, \quad b_3 = 120, \quad c_3 = 169 &= 3^2 + 4^2 + 12^2, \\ x_4 = 29, \quad y_4 = 12, \quad a_4 = 697, \quad b_4 = 696, \quad c_4 = 985 &= 12^2 + 20^2 + 21^2, \\ x_5 = 70, \quad y_5 = 29, \quad a_5 = 4059, \quad b_5 = 4060, \quad c_5 = 5741 &= 20^2 + 21^2 + 70^2. \end{aligned}$$

Ces exemples suffisent pour voir la loi de formation des groupes de nombres cherchés, et d'écrire que

$$(2) \quad c_n = x_{2n} = y_{2n+1}, \quad x_{2n-1} = y_{2n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

et

$$(3) \quad a_{2n} - b_{2n} = 1, \quad a_{2n+1} - b_{2n+1} = -1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Les relations (3), en tenant compte des formules respectives (1), s'écrivent sous la forme

$$x_{2n}^2 - x_{2n-1}^2 - 2x_{2n}x_{2n-1} = 1,$$

et

$$x_{2n+1}^2 - x_{2n}^2 - 2x_{2n}x_{2n+1} = -1.$$

En ajoutant ces dernières relations, nous obtenons

$$(4) \quad 2x_{2n} = x_{2n+1} - x_{2n-1}.$$

On démontre une formule analogue pour l'indice impair

$$(5) \quad 2x_{2n-1} = x_{2n} - x_{2n-2}.$$

Nous avons donc, pour la détermination des  $x_n$ , la relation de récurrence suivante :

$$(6) \quad 2x_n = x_{n+1} - x_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Or, en tenant compte de (2), la formule (5) donne

$$x_{2n} = c_n, \quad x_{2n-1} = \frac{c_n - c_{n-1}}{2},$$

et si l'on substitue ces valeurs dans (4), il vient

$$(7) \quad c_n = \frac{c_{n+1} + c_{n-1}}{6} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Les nombres cherchés  $c_n$  se déterminent donc de proche en proche au moyen de (7), si l'on connaît les valeurs initiales

$$c_0 = 1 \quad \text{et} \quad c_1 = 5.$$

Les relations (1) liant les nombres  $a_n$ ,  $b_n$  et  $x_n$  permettent de calculer la valeur numérique des  $a_n$  et  $b_n$ , dès que l'on connaît  $x_n$ . On peut toutefois établir une relation de récurrence donnant les  $a_n$ .

Sachant que

$$c_n = x_n^2 + x_{n-1}^2, \quad a_n = x_n^2 - x_{n-1}^2,$$

on aura

$$(8) \quad c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + a_n = x_{n+1}^2 - x_{n-1}^2,$$

ce qui, avec (7), conduit à la relation

$$(9) \quad 6(a_{n+1} - a_{n-1}) = a_{n+2} - a_{n-2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Les nombres  $b_n$  vérifient évidemment la même relation.

Observons que (5) et (8) donnent

$$x_{n+1}^2 - x_{n-1}^2 = 2x_{2n+1},$$

et l'on démontre encore la relation intéressante

$$c_{n-1}c_{n+1} - c_n^2 = 4.$$

Le théorème énoncé et démontré au début se formule de la manière suivante :

$$c_{2n} = a_n^2 + b_n^2 + x_{2n-1}^2 \quad \text{et} \quad c_{2n+1} = a_n^2 + b_n^2 + x_{2n+1}^2,$$

où les  $a_n$  et  $x_n$  sont donnés par (9) et (4), les  $b_n$  par (3).

On peut d'ailleurs exprimer les  $a_n$  au moyen des  $c_n$ . Nous trouvons que

$$a_n = \frac{3c_n - c_{n-1} + 2(-1)^n}{4},$$

et

$$b_n = a_n - (-1)^n = \frac{3c_n - c_{n-1} - 2(-1)^n}{4},$$

de sorte que, finalement,

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{2n} = \left( \frac{3c_n - c_{n-1} + 2(-1)^n}{4} \right)^2 \\ \quad + \left( \frac{3c_n - c_{n-1} - 2(-1)^n}{4} \right)^2 + \left( \frac{c_n - c_{n-1}}{2} \right)^2, \\ c_{2n+1} = \left( \frac{3c_n - c_{n-1} + 2(-1)^n}{4} \right)^2 \\ \quad + \left( \frac{3c_n - c_{n-1} - 2(-1)^n}{4} \right)^2 + \left( \frac{c_{n+1} - c_n}{2} \right)^2. \end{array} \right.$$

Les nombres  $c_n$  possèdent encore la propriété suivante : les relations

$$(2a_{2n} - 1)^2 = 2c_{2n}^2 - 1 \quad \text{et} \quad (2a_{2n+1} + 1)^2 = 2c_{2n+1}^2 - 1$$

montrent que le nombre  $2c_n^2 - 1$  est encore un carré parfait. On peut aussi écrire que

$$2c_n^2 - 1 = \left( \frac{3c_n - c_{n-1}}{2} \right)^2.$$

Passons enfin à la détermination numérique des nombres en question. La relation de récurrence (6) donnera, en posant  $x_n = \rho^n$ , l'équation

$$\rho^2 - 2\rho - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (\rho - 1)^2 = 2,$$

dont les racines sont

$$\rho_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad \rho_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Donc

$$x_n = A(1 + \sqrt{2})^n + B(1 - \sqrt{2})^n.$$

Or

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2,$$

d'où

$$A = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}, \quad B = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

Finalement

$$x_n = \frac{1}{4} \{ (1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^n \}$$

( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

La même méthode donne

$$c_n = \frac{1}{8} \{ (3 + 2\sqrt{2})^{n+1} + (3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^{n+1} + (3 - 2\sqrt{2})^n \}$$

( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),

et

$$a_n = \frac{1}{8} \{ (3 + 2\sqrt{2})^{n+1} - (3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^{n+1} - (3 - 2\sqrt{2})^n + 4(-1)^n \}$$

( $n = 0, 1, \dots$ ).

De la même façon

$$2c_n^2 - 1 = \left\{ \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} (3 + 2\sqrt{2})^n - \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} (3 - 2\sqrt{2})^n \right\}^2$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} [(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n] + \frac{\sqrt{2}}{2} [(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n] \right\}^2$$

( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),

carré parfait, comme nous l'avons dit plus haut.

Remarquons finalement que tous les nombres  $c_n$  sont de la forme  $6k \pm 1$ .

*Remarques.* — a. Considérons le polynôme

$$B_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 4})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 + 4})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{x^2 + 4}}.$$

Pour  $x = 2$ , nous obtenons les nombres  $x_n : x_n = B_n(2)$  (nombres de Fermat). Ainsi  $c_n = B_{2n}(2)$  : les nombres  $c_n$  cherchés sont les nombres de Fermat de rang pair.

b. En considérant la valeur  $c_3 = 169 = 13^2$ , nous voyons que

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2.$$

C'est une propriété générale, qui résulte de l'identité

$$x^2 + (x+1)^2 + x^2(x+1)^2 = [x(x+1)+1]^2.$$

---