BULLETIN DE LA S. M. F.

POTRON

Sur les matrices non négatives et les solutions positives de certains systèmes linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 56-61.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__56_0>

SUR LES MATRICES NON NÉGATIVES, ET LES SOLUTIONS POSITIVES DE CERTAINS SYSTÈMES LINÉAIRES;

Par M. l'Abbé Potron.

1. Les matrices non négatives (dont aucun élément n'est négatif) ont été étudiées par Frobenius [1]. Il a démontré les résultats suivants :

F. I. *Si* $\mathbf{a}$, *d'éléments* a_{ik}, *est une matrice carrée non négative, le déterminant caractéristique* $|s\mathbf{u}-\mathbf{a}|$ *a toujours une racine réelle* r, *non négative, au moins égale au module de toute autre racine.*

Cette racine r est dite *racine maximale* de la matrice.

F. II. Soient $\mathbf{a}_j(\mathbf{a}_n=\mathbf{a})$ la matrice formée des éléments des j premières lignes et colonnes de $\mathbf{a}$, et $r_j(r_n=r)$ la racine maximale de $\mathbf{a}_j$. *On a* $r_j \leqq r_{j+1}$ $(j=1, \ldots, n-1)$*; dans l'adjoint du déterminant caractéristique, les éléments diagonaux* $A_{ii}(s)$ *sont tous positifs, et les autres éléments* $A_{ij}(s)$ *non négatifs pour* $s>r$*; les* $A_{ii}(r)$ *et* $A_{ij}(r)$ *sont non négatifs; dans le déterminant* $|r\mathbf{u}-\mathbf{a}|$, *si un mineur symétrique de degré quelconque est nul, il en est de même de tout mineur symétrique le contenant; si un mineur symétrique est positif, il en est de même de tous ceux qu'il contient.*

F. III. *Si les* $A_{ii}(r)$ *sont tous positifs,* 1° *la matrice* $\mathbf{a}$ *est indécomposable* (¹)*;* 2° *les* $A_{ij}(r)$ *sont tous positifs,* 3° *si* $\mathbf{x}$, *d'élément* x_i, *est une matrice de type* $(n, 1)$, *et* $\mathbf{y}$, *d'éléments* y^i

(¹) Une matrice $\mathbf{a}$, de type (n, n) est *décomposable* si les lignes et colonnes peuvent être mises, sans changer la diagonale, dans un ordre tel que $\mathbf{a}$ ait la forme $\begin{pmatrix} \mathbf{b} & 0 \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}$ étant de type (h, h), o (zéro) une matrice *nulle* de type $(h, n-h)$, $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$ de types $n-h, h)$ et $(n-h, n-h)$. Les sous-matrices $\mathbf{b}$ et $\mathbf{d}$ sont dites *composantes de* $\mathbf{a}$.

une matrice du type $(1, n)$, *chacun des systèmes linéaires*

$$(r\mathbf{u}-\mathbf{a})\mathbf{x}=0, \qquad \mathbf{y}(r\mathbf{u}-\bar{\mathbf{a}})=0,$$

a une solution positive.

F. IV. *Si l'un des* $A_{ii}(r)$ *est nul, il existe certainement un mineur symétrique* $b(s)$, *confondu avec* $A_{ii}(s)$ *ou contenu dans* $A_{ii}(s)$, *pouvant être de degré* 1, *et ayant les deux propriétés :* 1° $b(r)=0$; 2° *si le degré de* $b(s)$ *est* >1, *tout mineur symétrique de* $b(r)$ *est positif. Alors la matrice* **a** *est décomposable, et la sous-matrice dont les éléments sont ceux de* $b(0)$ *est composante indécomposable.*

Corollaire. — *Si la matrice* **a** *est indécomposable, les* $A_{ii}(r)$ *sont tous positifs, et l'on a* 2° *et* 3° *de* F. III.

J'ai montré autrefois [2] que l'on déduit, de ces théorèmes les résultats suivants :

P. I. *Soit* **a** *une matrice non négative, de type* (n, n), *indécomposable, et* **b** *une matrice non négative et non nulle, de type* $(n, 1)$; 1° *quel que soit* $s>r$, *le système linéaire* $(s\mathbf{u}-\mathbf{a})\mathbf{x}=\mathbf{b}$ *a une solution positive;* 2° *si ce système a une solution non négative et non nulle,* s *est* $>r$.

P. II. *Soit* **a** *décomposable et* **b** *positive. Pour que le système considéré ait une solution positive, il faut et suffit que* s *soit* $>r$.

2. Ces théorèmes ne fournissent aucun moyen simple pour reconnaître si s est $>$ ou $<r$. Le calcul des dérivées successives de $|s\mathbf{u}-\mathbf{a}|$, que $s>r$ doit rendre toutes positives, exigerait le calcul de tous les mineurs symétriques de degrés $n-1$, $n-2$, ...

Mais une méthode nouvelle [3] de calcul de la solution d'un système linéaire, d'après laquelle le calcul se fait en trois étapes, permet de reconnaître, dès la première étape, si s est $>$ ou $<r$, et par suite, si le système admet, ou non, une solution positive. Voici cette méthode, qui n'a pas été publiée *in extenso* [1].

[1] M. Lanczos n'a donné dans le *Bull. Am. Math. Soc.* qu'un résumé très sommaire. Il a eu l'obligeance de me communiquer son manuscrit.

3. Soit un sytème linéaire quelconque

$$(1) \qquad \mathbf{dx} = \mathbf{b}.$$

Cherchons à déterminer deux matrices triangulaires α et β ($\alpha_i^i = \beta_i^i = 1$, $\alpha_i^k = \beta_i^k = 0$ pour $i < k$, et une matrice diagonale $\lambda (\lambda_i^k = 0$ pour $i \neq k)$ telle que l'on ait

$$(2) \qquad \alpha \lambda \bar{\beta} = \mathbf{d}.$$

On voit que (2) donne

$$(3) \qquad \Sigma \alpha_i^j \lambda_j^j \beta_k^j = d_i^k.$$

D'après les conditions imposées aux matrices α et β, les seuls termes $\neq 0$ du premier membre seront obtenus pour $j \leqq \min [h, k]$. On aura donc

$$(4) \quad \alpha_m^1 \lambda_1^1 \beta_k^1 + \ldots + \alpha_m^{k-1} \lambda_{k-1}^{k-1} \beta_k^{k-1} + \alpha_m^k \lambda_k^k = d_m^k \qquad (k = 1, \ldots, m-1),$$

$$(5) \quad \alpha_i^1 \lambda_1^1 \beta_m^1 + \ldots + \alpha_i^{i-1} \lambda_{i-1}^{i-1} \beta_m^{i-1} + \lambda_i^i \beta_m^i = d_i^m \qquad (i = 1, \ldots, m-1),$$

$$(6) \quad \alpha_m^1 \lambda_1^1 \beta_m^1 + \ldots + \alpha_m^{m-1} \lambda_{m-1}^{m-1} \beta_m^{m-1} + \lambda_m^m = d_m^m.$$

Si $\mathbf{d}_m$, α_m, β_m, λ_m désignent les sous-matrices formées des éléments des m premières lignes et colonnes de $\mathbf{d}$, α, β, λ, on déduit de (4)-(5)-(6) la relation.

$$(7) \qquad \alpha_m \lambda_m \bar{\beta}_m = \mathbf{d}_m.$$

Comme $|\alpha_m| = |\beta_m| = 1$, on tire de (7)

$$(8) \qquad |\mathbf{d}_m| = |\lambda_m| = \lambda_1^1 \lambda_2^2 \ldots \lambda_m^m.$$

Ces formules permettent de calculer par récurrence, les matrices α, β, λ. Supposons en effet connues α_{m-1}, β_{m-1}, λ_{m-1}. Les formules (4) détermineront successivement $\alpha_m^1, \alpha_m^2, \ldots, \alpha_m^{m-1}$: les formules (5) détermineront de même successivement $\beta_m^1, \beta_m^2, \ldots, \beta_m^{m-1}$; puis la formule (6) donnera λ_m^m.

Ce calcul ne peut être arrêté que si l'un des λ_i^i est trouvé nul. D'après (8), cette circonstance se présentera toujours et seulement si $|\mathbf{d}_i|$ est le premier déterminant nul de la suite $|\mathbf{d}_1|, |\mathbf{d}_2|, \ldots$. Or, si $|\mathbf{d}|$ est $\neq 0$, il est toujours possible de mettre les colonnes dans un ordre tel que tous les $|\mathbf{d}_i|$ soient $\neq 0$. La propriété est évidente pour un déterminant de degré 2. Supposons-la vraie pour tout déterminant de degré $< n$. Si $|\mathbf{d}|$ est $\neq 0$, l'un au moins des éléments de la dernière ligne de son adjoint est $\neq 0$; on peut toujours mettre les colonnes dans un ordre tel que cet élément $\neq 0$ soit $D_n^n = |\mathbf{d}_{n-1}|$. On peut ensuite, d'après l'hypothèse faite, mettre les $n-1$ premières colonnes dans un ordre tel que les $|\mathbf{d}_i|$ $(i = 1, \ldots, n-2)$ soient tous $\neq 0$.

Comme il sera démontré plus loin, cette première étape du calcul, appliqué, à la matrice $\mathbf{d} = s\mathbf{u} - \mathbf{a}$, suffit pour reconnaître si le nombre s est inférieur ou supérieur à la racine maximale r de la matrice $\mathbf{a}$. Cette première étape du calcul suffit donc pour prévoir si la solution du système $(s\mathbf{u} - \mathbf{a})\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est, ou non, positive. Elle suffit d'ailleurs pour le calcul du déterminant $|\mathbf{d}| = \lambda_1^1 \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^n$.

4. Les matrices auxiliaires, vérifiant (2), ayant été formées, le système (1) s'écrit

$$\alpha\lambda\beta\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{9}$$

Il peut être résolu par la résolution successive de

$$\alpha\mathbf{z} = \mathbf{b}, \tag{10}$$

$$\lambda\mathbf{y} = \mathbf{z}, \tag{11}$$

$$\beta\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{12}$$

Le système (10), qui peut s'écrire

$$\alpha_h^1 z_1 + \ldots + \alpha_h^{h-1} z_{h-1} + z_h = b_h \qquad (h = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

donne successivement $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Puis (11) donne $y_i = \dfrac{z_i}{\lambda_i^i}$; enfin le système (12), qui peut s'écrire

$$x_h + \beta_{h+1}^h x_{h+1} + \ldots + \beta_n^h x_n = y_h, \tag{12}$$

donne successivement $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

5. Prenons maintenant $\mathbf{d} = s\mathbf{u} - \mathbf{a}$. Si s est $> r$, tous les $|\mathbf{d}_i|$ sont positifs (F. II). D'après (8), il en est de même de tous les λ_i^i. Inversement, supposons que les λ_i^i soient trouvés tous positifs. Dans (4) et (5), on a maintenant $d_m^k = -a_m^k \leqq 0$, $d_i^m = -a_i^m \leqq 0$. Pour $m = 2$, on a

$$\alpha_2^1 \lambda_1^1 = -a_2^1, \qquad \lambda_1^1 \beta_2^1 = -a_1^2.$$

Donc les éléments non diagonaux des sous-matrices α_2 et $\overline{\beta}_2$ sont $\leqq 0$. S'il en est ainsi des éléments non diagonaux de $\alpha_{m-\overline{1}}$ et $\beta_{m-\overline{1}}$, les formules (4) et (5) montrent, de proche en proche, que les α^i_m et $\beta^i_m (i = 1, 2, \ldots, m-1)$ sont $\leqq 0$. Alors, si l'on prend pour **b** une matrice positive, les formules (10) et (11) donnent des valeurs positives successivement pour $z_{\overline{1}}, z_{\overline{2}}, \ldots, y_1, \ldots, y_n$, et les formules (12) donnent des valeurs positives successivement pour $x_n, x_{-1n}, \ldots, x_{\overline{1}}$.

Ainsi, si les λ^i_i sont trouvés tous positifs, le système

$$(s\mathbf{u} - \mathbf{a})\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

b étant une matrice positive, a une solution positive; donc s est supérieur à la racine maximale r.

On a donc le résultat : *pour que s soit supérieur à r, racine maximale de la matrice non négative* **a**, *il faut et suffit que la matrice diagonale* λ, *calculée par récurrence, en même temps que les matrices triangulaires* α et β, *à partir de la matrice* $\mathbf{a} - s\mathbf{u}$, *soit une matrice positive.*

6. Ce critérium est avantageux au point de vue du calcul pratique. D'abord, λ^i_i dépend seulement des éléments de $\mathbf{a}_i$. Ensuite, l'ordre dans lequel se présentent les λ^i_i dépend de l'ordre adopté pour les éléments diagonaux de **a**. Cet ordre peut être modifié à condition d'opérer en même temps les mêmes permutations sur les lignes et colonnes de mêmes rangs. Plusieurs calculateurs, ayant adopté des ordres différents, pourront opérer simultanément. Si, dans $s\mathbf{u} - \mathbf{a}$, s est $< r$, on arrivera ainsi plus vite au λ^i_i non positif qui doit sûrement se présenter.

7. Les problèmes économiques relatifs aux équilibres production-consommation et prix-salaires se ramènent, comme je l'ai montré [2, 4] à la recherche de deux matrices positives à une colonne, **p** pour les productions, **a** pour les prix, solutions des systèmes $(\mathbf{u} - \mathbf{C})\mathbf{p} = \mathbf{f}$, $(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{C}})\mathbf{a} = \mathbf{b}$, **C** étant une matrice carrée, non négative, donnée, **f** et **b** deux matrices à une colonne, positives, arbitraires. Les matrices solutions seront positives toujours et seulement si la racine maximale de **C** est < 1. Le calcul des λ^i_i succes-

sifs permettrait de reconnaître si cette condition est remplie, et préparerait le calcul des solutions.

BIBLIOGRAPHIE.

1. FROBENIUS, *Positive und nicht-negative Matrizen* (*Sitzungsberichte der Academie von Berlin*, 1908, p. 471; 1909, p. 514; 1912, p. 456).

2. POTRON, *Les Substitutions linéaires à Coefficients non négatifs* (*Annales de l'École Normale*, t. 30, 1913, p. 53; *C. R. Acad. Sc.*, t. 153, 1911, p. 1129 et 1458; t. 204, 1937, p. 844).

3. LANCZOS, *Recursion Method for solving linear Equations* (*Bulletin of the American Mathematical Society*, t. 42, 1936, p. 325).

4. POTRON, *L'Aspect mathématique de certains Problèmes économiques* (Paris, 1936, chez l'auteur).