BULLETIN DE LA S. M. F.

LEWIS-BAYARD ROBINSON

Un système de Riquier et le calcul tensoriel. II

Bulletin de la S. M. F., tome 68 (1940), p. 129-133.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1940__68__129_0>

UN SYSTÈME DE RIQUIER ET LE CALCUL TENSORIEL;

(DEUXIÈME PARTIE).

PAR M. LEWIS-BAYARD ROBINSON.

Introduction.

Wilczynski a calculé les covariants et semi-covariants du système

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} y_1'' + p_{11}y_1' + p_{12}y_2' + q_{11}y_1 + q_{12}y_2 = 0, \\ y_2'' + p_{21}y_1' + p_{22}y_2' + q_{21}y_1 + q_{22}y_2 = 0 \end{cases}$$

sous le groupe de transformations

$$y_k = \sum_{\lambda=1}^{2} \alpha_{k\lambda}(x)\,\eta_\lambda,$$

$$y_k^{(l)} = \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\rho=0}^{l}\binom{l}{\rho}\alpha_{k\lambda}^{(\rho)}(x)\,\eta^{(l-\rho)}\,x = f(\xi) \qquad (k=1,2;\ l=0,1,2,\ldots,m) \quad (^1),$$

où $\binom{l}{\rho}$ est le coefficient de x^ρ dans le développement de $(1+x)^l$.

Quand il s'agit des semi-covariants

$$x = f(\xi) = \xi.$$

nous pouvons associer au système ci-dessus un système desemi-tenseurs

$$\bar{\mathrm{I}}_1 = \sum_{k=0}^{k=r} \frac{r!}{(r-k)!\,k!}\,\Delta_{11}^{r-k}\,\Delta_{21}^{k}\,\mathrm{I}_{1+k} \equiv \mathrm{V}_1,$$

$$\bar{\mathrm{I}}_{s+1} = \frac{(r-s)!}{r!}\left[\Delta_{12}\frac{\partial}{\partial\Delta_{11}} + \Delta_{22}\frac{\partial}{\partial\Delta_{21}}\right]^s \mathrm{V}_1 \qquad (s=1,2,\ldots,r),$$

---

(1) *Voir* WILCZYNSKI, *Projective differential Geometry*, Chapter IV.

où les I dépendent de

$$y_1,\ y_2,\ y'_1,\ y'_2,$$
$$p_{ij},\ p'_{ij},\ q_{ij} \qquad (i, j = 1, 2),$$
$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$
$$\Delta_{11} \equiv \alpha_{22}, \qquad \Delta_{12} \equiv -\alpha_{21},$$
$$\Delta_{21} \equiv -\alpha_{12}, \qquad \Delta_{22} \equiv \alpha_{11}.$$

Nous avons étudié en détail le cas où

$$r = 2 \quad ({}^2).$$

Nous procéderons au calcul des semi-tenseurs dans le casgénéral. Nous pourrons les trouver comme les solutions d'un système d'équations désigné par le symbole (A).

Écrivons le système

$$\Omega_{ij}(f) \equiv 2\frac{\partial f}{\partial p'_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial q_{ii}},$$

$$\Psi_{ij}(f) \equiv -y_j\frac{\partial f}{\partial y'_i} + 2\frac{\partial f}{\partial p_{ij}} + \sum_{\lambda=1}^{2}\left(p_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial p'_{\lambda j}} - p_{j\lambda}\frac{\partial f}{\partial p'_{i\lambda}} + p_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial q_{\lambda j}}\right),$$

$$\Phi_{ij}(f) \equiv -y_j\frac{\partial f}{\partial y_i} - y'_j\frac{\partial f}{\partial y'_i}$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{2}\left(p_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial p_{\lambda j}} - p_{j\lambda}\frac{\partial f}{\partial p_{i\lambda}} + p'_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial p'_{\lambda j}} - p'_{j\lambda}\frac{\partial f}{\partial p'_{i\lambda}} + q_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial q_{\lambda j}} - q_{j\lambda}\frac{\partial f}{\partial q_{i\lambda}}\right).$$

Cherchons à résoudre le système

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} \Omega_{ij}(\mathrm{I}_k) = 0 & (i, j = 1, 2), \\ \Psi_{ij}(\mathrm{I}_k) = 0 & (k = 1, 2, \ldots, r+1); \\ \Phi_{12}(\mathrm{I}_k) = -(r-k+1)\mathrm{I}_{k+1}, \\ \Phi_{11}(\mathrm{I}_k) = +(k-1)\mathrm{I}_k, \\ \Phi_{22}(\mathrm{I}_k) = +(r-k+1)\mathrm{I}_k, \\ \Phi_{21}(\mathrm{I}_k) = -(k-1)\mathrm{I}_{k-1}. \end{cases}$$

L'intégration du système

$$\Omega_{ij}(f) = 0, \qquad \Psi_{ij}(f) = 0, \qquad \Phi_{ij}(f) = 0 \quad ({}^3)$$

---

(2) Voir *Comptes rendus* (Doklady) *de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, 1937, p. 411.

(3) Voir *Projective differential Geometry*, loco-citoto.

nous donne un système complet de semi-covariants. L'intégration du système (A) nous donne un système complet de semi-tenseurs.

L'intégration du système (A) est équivalente à l'intégration du système suivant

$$(B)\quad \begin{cases} \Omega_{ij}(f) = 0, \qquad \Psi_{ij}(f) = 0, \\ \Phi_{12}(f) - \sum_{k=1}^{k=r+1} (r-k+1) I_{k+1} \dfrac{\partial f}{\partial I_k} = 0, \\ \Phi_{11}(f) + \sum_{k=1}^{k=r+1} (k-1) I_k \dfrac{\partial f}{\partial I_k} = 0, \\ \Phi_{22}(f) + \sum_{k=1}^{k=r+1} (r-k+1) I_k \dfrac{\partial f}{\partial I_k} = 0, \\ \Phi_{21}(f) = \sum_{k=1}^{k=r+1} (k-1) I_{k-1} \dfrac{\partial f}{\partial I_k} = 0 \quad (^1). \end{cases}$$

Une intégrale première du système (B) peut s'écrire

$$f_1 \equiv y_1^r I_{r+1} - r y_1^{r-1} y_2 I_r + \frac{r(r-1)}{1.2} y_1^{r-2} y_2^2 I_{r-1} (-1)^r y_2^r I_1.$$

Nous tirons une chaîne de solutions f_{s+1} de la première solution ainsi

$$f_{s+1} \equiv \left(Y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) f_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, r),$$

où

$$Y_1 \equiv 2y'_1 + y_2 p_{12} + y_1 p_{11},$$
$$Y_2 \equiv 2y'_2 + y_1 p_{21} + y_2 p_{22}.$$

Nous avons aussi comme solutions

$$I \equiv u_{11} + u_{22}, \qquad J \equiv u_{11} u_{22} - u_{12} u_{21},$$
$$\frac{E}{D} \equiv \frac{1}{D} \{ u_{12} y_2^2 - u_{21} y_1^2 + (u_{11} - u_{22}) y_1 y_2 \},$$
$$\frac{F}{D} \equiv \frac{1}{D} \{ u_{12} Y_2^2 - u_{21} Y_1^2 + (u_{11} - u_{22}) Y_1 Y_2 \},$$

(1) *Voir* Riquier, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, p. 502.

où

$$u_{11} \equiv 2p'_{11} - 4q_{11} + p_{11}^2 + p_{12}p_{21},$$
$$u_{12} \equiv 2p'_{12} - 4q_{12} + p_{12}(p_{11} + p_{22}),$$
$$u_{21} \equiv 2p'_{21} - 4q_{21} + p_{21}(p_{11} + p_{22}),$$
$$u_{22} \equiv 2p'_{22} - 4q_{22} + p_{22}^2 + p_{12}p_{21},$$

$$D \equiv \begin{vmatrix} y_1 & Y_1 \\ y_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Par conséquent la solution générale du système (B) peut s'écrire

$$\Phi\left\{f_1, f_2, \ldots, f_{r+1};\ I,\ J,\ \frac{E}{D}, \frac{F}{D}\right\},$$

où Φ est une fonction arbitraire.

Écrivons

(C) $$\Phi_1 = \Phi_2 = \ldots = \Phi_{r+1} = 0.$$

Les Φ_i sont des fonctions arbitraires de

$$f_1,\quad f_2,\quad \ldots,\quad \frac{F}{D}.$$

Résolvons les $\Phi_i = 0$ par rapport aux $f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}$.

Nous aurons

$$f_i = \Psi_i\left\{I,\ J,\ \frac{E}{D}, \frac{F}{D}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r+1).$$

où les Ψ sont des fonctions arbitraires.

Écrivons

$$M \equiv \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{r+1})}{D(I_1, I_2, \ldots, I_{r+1})}.$$

Les f sont linéaires par rapport aux I.

Pour cette raison, M ne dépend pas des I.

Désignons les mineurs du déterminant M par les symboles M_{ij}.

Attachons-nous à résoudre le système $f_i = \Psi_i$ par rapport aux I.

Nous obtiendrons

$$I_i = \frac{1}{M}\sum_1^{r+1}{}_j M_{ij}\Psi_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, r+1).$$

Voilà la solution générale du système (A) et le système complet de semi-tenseurs.

Conclusion.

Si l'on veut calculer les semi-tenseurs qui dépendent de

$$y_i, \quad y'_i \,; \quad p_{ij}^{(l)}, \quad q_{ij},$$

il faut ajouter aux quantités

$$\mathrm{I}, \quad \mathrm{J}, \quad \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}, \quad \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{D}}$$

tous les semi-covariants restants de Wilczynski.