BULLETIN DE LA S. M. F.

A. BIGARD

K. KEIMEL

Sur les endomorphismes conservant les polaires d’un groupe réticulé archimédien

Bulletin de la S. M. F., tome 97 (1969), p. 381-398.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1969__97__381_0>

Bull. Soc. math. France,
97, 1969, p. 381 à 398.

SUR LES ENDOMORPHISMES CONSERVANT LES POLAIRES D'UN GROUPE RÉTICULÉ ARCHIMÉDIEN

PAR

ALAIN BIGARD ET KLAUS KEIMEL.

Jusqu'à maintenant peu de recherches ont été faites sur les endomorphismes d'un groupe réticulé. Ici nous considérerons les endomorphismes de groupes réticulés archimédiens.

L'anneau engendré par les endomorphismes positifs d'un groupe réticulé complet est un anneau réticulé, comme on peut le déduire du théorème 17 de l'ouvrage de BIRKHOFF [4], chap. XV).

P. CONRAD a conjecturé que l'anneau engendré par les endomorphismes positifs conservant les polaires d'un groupe réticulé archimédien est un anneau réticulé, même un f-anneau. Ceci a été démontré par le premier des auteurs pour l'anneau engendré par les endomorphismes positifs qui conservent les l-idéaux et non seulement les polaires [3]. Ici nous allons démontrer la conjecture de Conrad dans le cas général. Le cadre de la théorie de BERNAU [1] permet de donner une représentation des endomorphismes en question (section 1). Une propriété importante de ces endomorphismes est que leur noyau est une polaire (section 2). Les cas particuliers des contracteurs et endomorphismes positifs bornés sont considérés dans la section 3. Certaines propriétés du groupe réticulé sont reflétées par l'anneau d'endomorphismes en question (section 4). Dans la section 5, nous donnerons des applications aux f-anneaux. En particulier, nous montrerons que deux f-anneaux archimédiens unitaires, qui sont isomorphes comme groupes réticulés, sont isomorphes comme f-anneaux.

Nous utiliserons la terminologie de FUCHS [8] et CONRAD [7] : Un *groupe réticulé* est un groupe muni d'une structure de treillis compatible avec la loi de groupe. Un groupe réticulé est *archimédien*, si $na \leq b$, pour tout entier positif n, entraîne $a \leq 0$. Tout groupe réticulé archimédien est commutatif ([8], p. 91). Tout groupe totalement ordonné archimédien est isomorphe à un sous-groupe du groupe totalement ordonné $\mathbf{R}$ des nombres réels ([8], p. 45); un tel groupe sera aussi appelé *groupe réel.* Un *anneau réticulé* est un anneau A muni d'une structure de treillis telle que A est un groupe réticulé additif et telle que la multiplication est isotone. Un *f-anneau* est un anneau réticulé vérifiant :

$$x \wedge y = 0 \quad \text{entraîne} \quad zx \wedge y = 0 = xz \wedge y \quad \text{pour tout} \quad z \geqq 0.$$

Un *l-homomorphisme* est une application d'un groupe réticulé dans un autre, qui est un homomorphisme de groupe et de treillis. Le noyau d'un l-homomorphisme est un *l-idéal,* c'est-à-dire un sous-groupe distingué sous-treillis convexe. Inversement, si I est un l-idéal d'un groupe réticulé A, le groupe quotient A/I possède une seule structure de groupe réticulé telle que l'application canonique de A sur A/I devient un l-homomorphisme. Un l-idéal I est dit *premier,* si A/I est totalement ordonné. Tout l-idéal premier contient un l-idéal premier minimal. Si l'on parle d'anneaux réticulés, un *l-homomorphisme* est un homomorphisme d'anneau et de treillis. Les termes *l-endomorphisme, l-isomorphisme* seront employés de façon analogue.

Pour tout sous-ensemble B d'un groupe réticulé A, soit

$$B^{\perp} = \{ x \in A;\ |x| \wedge |b| = 0 \ \text{pour tout} \ b \in B \}.$$

(On désigne par $|x|$ la valeur absolue $x \vee (-x)$ de l'élément x de A). Au lieu de $\{a\}^{\perp}$ nous écrirons simplement $a^{\perp}$. Toute partie de A de la forme $B^{\perp}$ est appelée une *polaire.* Toute polaire est un sous-groupe sous-treillis convexe. Donc, si A est abélien, toute polaire est un l-idéal. Une partie B est *dense* dans A, si $A = B^{\perp\perp}$. Si $e > 0$ et si $e^{\perp\perp} = A$ (c'est-à-dire si $\{e\}$ est dense), alors e est appelé *unité faible* de A. L'ensemble des polaires de A est une algèbre de Boole avec

$$P \wedge P_1 = P \cap P_1, \qquad P \vee P_1 = (P \cup P_1)^{\perp\perp} = (P^{\perp} \cap P_1{}^{\perp})^{\perp},$$

le complément de P étant $P^{\perp}$ [13]. Les facteurs directs de A forment une sous-algèbre de l'algèbre de Boole des polaires.

Un groupe réticulé abélien est dit *hyper-archimédien,* si tout l-idéal principal de A est un facteur direct. Un groupe hyper-archimédien est archimédien et tous ses l-idéaux principaux sont des polaires [2].

1. **Le théorème fondamental.**

Soient A un groupe réticulé abélien et A^+ son cône positif. L'ensemble End (A) de tous les endomorphismes du groupe A est un anneau ordonné si l'on définit une relation d'ordre sur End(A) par

$$\varphi \leqq \psi \quad \text{si et seulement si} \ \varphi a \leqq \psi a \ \text{pour tout} \ a \in A^+.$$

Nous nous intéresserons à des endomorphismes particuliers.

PROPOSITION 1. — *Pour un endomorphisme* $\varphi \in \mathrm{End}(A)$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $a \wedge b = 0$ *entraîne* $\varphi a \wedge b = 0$;
(*b*) $\varphi \geqq 0$, *et* φ *conserve les polaires de A;*
(*c*) $\varphi \geqq 0$, *et* φ *conserve les l-idéaux premiers minimaux de A.*

Démonstration. — Supposons que φ vérifie la propriété (*a*). Alors $a \wedge 0 = 0$ entraîne $\varphi a \wedge 0 = 0$; c'est-à-dire que $\varphi \geqq 0$. De plus, $a \in b^{\perp}$ entraîne $\varphi a \in b^{\perp}$; c'est-à-dire que φ conserve les polaires de la forme $b^{\perp}$. Toute polaire P de A est l'intersection des polaires $b^{\perp}$, si b parcourt $P^{\perp}$. Par conséquent, P est stable par φ. Donc (*a*) entraîne (*b*). Il est clair que (*b*) entraîne (*a*). Finalement, (*b*) et (*c*) sont équivalentes, puisque d'une part, tout *l*-idéal premier minimal est une somme de polaires ([7], p. 44), et puisque, d'autre part, toute polaire est une intersection de *l*-idéaux premiers minimaux ([14], theorem 1.15).

DÉFINITION. — On appelle *orthomorphisme positif* de A tout endomorphisme $\varphi \in \mathrm{End}(A)$ vérifiant l'une des propriétés équivalentes (*a*), (*b*), (*c*) de la proposition 1, et on désigne par $\mathrm{Orth}(A)^+$ l'ensemble des orthomorphismes positifs de A. Tout endomorphisme de A de la forme $\varphi - \psi$, où φ et ψ sont des orthomorphismes positifs, est appelé *orthomorphisme.* On désigne par $\mathrm{Orth}(A)$ l'ensemble des orthomorphismes de A.

Montrons que $\mathrm{Orth}(A)$ est un sous-anneau de $\mathrm{End}(A)$. Plus précisément :

PROPOSITION 2. — *L'ensemble* $\mathrm{Orth}(A)$ *des orthomorphismes de A est un anneau ordonné filtrant unitaire sous-anneau de l'anneau ordonné* $\mathrm{End}(A)$, *et* $\mathrm{Orth}(A)^+$ *est le cône positif de* $\mathrm{Orth}(A)$.

Démonstration. — Soient φ et ψ deux orthomorphismes positifs de A. Puisque les polaires de A sont stables par φ et par ψ, elles sont aussi stables par l'endomorphisme composé $\varphi\psi$, et puisque les polaires sont des sous-groupes de A, elles sont aussi stables par $\varphi + \psi$ et $\varphi - \psi$. Puisque φ et ψ sont positifs, $\varphi\psi$ et $\varphi + \psi$ sont aussi positifs. Par conséquent, $\mathrm{Orth}(A)^+$ est un demi-anneau d'endomorphismes de A. Il s'ensuit que l'ensemble $\mathrm{Orth}(A)^+ - \mathrm{Orth}(A)^+$ de tous les orthomorphismes est un sous-anneau de $\mathrm{End}(A)$. Évidemment, l'application identique est un orthomorphisme. Si $\varphi - \psi$ est positif, $\varphi - \psi$ appartient aussi à $\mathrm{Orth}(A)^+$, ce qui montre que $\mathrm{Orth}(A)^+$ est justement le cône positif de $\mathrm{Orth}(A)$.

REMARQUE 1. — Si A est totalement ordonné, tout endomorphisme positif est un orthomorphisme. En effet, $\{0\}$ et A sont les seules polaires de A.

Remarque 2. — La propriété (*a*) de la proposition 1 montre que, pour tout orthomorphisme positif φ de A,

$$a \wedge b = 0 \quad \text{entraîne} \quad \varphi a \wedge \varphi b = 0;$$

par conséquent, tout orthomorphisme positif de A est un *l*-endomorphisme ([5], lemme 1 du § 6).

Le but principal de cette section est de montrer que Orth (A) est un *f*-anneau, si A est archimédien. Pour cela, nous aurons besoin de plusieurs lemmes.

Lemme 1. — *Pour que* Orth(A) *soit un f-anneau, il suffit que la propriété suivante* ($\bigstar$) *soit vérifiée :*

($\bigstar$) *Pour tout* $\varphi, \psi \in$ Orth $(A)^+$ *et tout* $a, b \in A^+$,

$$\varphi(a+b) \vee \psi(a+b) = (\varphi a \vee \psi a) + (\varphi b \vee \psi b);$$

et dans ce cas, on a $(\varphi \vee \psi) a = \varphi a \vee \psi a$ *pour tout* $\varphi, \psi \in \mathrm{Orth}(A)^+$ *et tout* $a \in A^+$.

Démonstration. — L'anneau ordonné filtrant Orth(A) est réticulé si et seulement si son cône positif est un $\vee$-demi-treillis. Prenons donc deux orthomorphismes positifs φ et ψ, et définissons une application η de A^+ dans A^+ par $\eta a = \varphi a \vee \psi a$. La propriété ($\bigstar$) permet de dire que η est un homomorphisme additif sur A^+. Par conséquent, η peut être prolongé en un endomorphisme $\bar{\eta}$ du groupe A. Évidemment, η est positif, et $\bar{\eta}$ conserve les polaires de A, car toute polaire est un sous-treillis de A. Donc, $\bar{\eta} \in \mathrm{Orth}(A)^+$. D'après sa définition même, $\bar{\eta}$ est le plus petit majorant de φ et ψ. Par conséquent, Orth(A) est un anneau réticulé; montrons qu'il est un *f*-anneau. Soient φ, ψ, η des orthomorphismes positifs de A. Si $\varphi \wedge \psi = 0$, alors $\varphi a \wedge \psi a = 0$ pour tout $a \in A^+$, donc $\eta\varphi a \wedge \psi a = 0$ pour tout $a \in A^+$, ce qui signifie $\eta\varphi \wedge \psi = 0$; de plus,

$$(\varphi\eta \wedge \psi) a \leq \varphi(\eta \vee 1) a \wedge \psi(\eta \vee 1) a = (\varphi \wedge \psi)((\eta \vee 1) a) = 0$$

entraîne

$$\varphi\eta \wedge \psi = 0.$$

Il y a un cas particulier où la condition ($\bigstar$) est facile à vérifier.

Proposition 3. — *Si A est un groupe réel, il vérifie* ($\bigstar$), *et* Orth (A) *est un anneau réel.*

Démonstration. — Nous pouvons supposer que A est un sous-groupe de $\mathbf{R}$. Pour tout endomorphisme positif φ de A, il y a un nombre réel positif r_φ tel que $\varphi x = r_\varphi x$ pour tout $x \in A$ ([8], p. 46). A tout orthomorphisme $\eta = \varphi - \psi$, où φ et ψ sont des orthomorphismes positifs, on associe $r_\eta = r_\varphi - r_\psi$. On vérifie facilement que $\eta \mapsto r_\eta$ est un l-isomorphisme de $\mathrm{Orth}(A)$ sur un sous-anneau de $\mathbf{R}$. De plus, $(\bigstar)$ est vérifiée; car si $\varphi, \psi \in \mathrm{Orth}(A)^+$ et $a, b \in A^+$, alors

$$\begin{aligned}\varphi(a+b) \vee \psi(a+b) &= r_\varphi(a+b) \vee r_\psi(a+b) = (r_\varphi \vee r_\psi)(a+b)\\ &= (r_\varphi a \vee r_\psi a) + (r_\varphi b \vee r_\psi b) = (\varphi a \vee \psi a) + (\varphi b \vee \psi b).\end{aligned}$$

Soit I un l-idéal de A. Pour tout élément a de A, désignons par a_I l'image canonique de a dans le groupe réticulé quotient A/I. Si φ est un endomorphisme du groupe A tel que I soit stable par φ, alors φ induit un endomorphisme φ_I du groupe A/I défini par $\varphi_I(a_I) = (\varphi a)_I$ pour tout $a \in A$. Si, de plus, φ est un l-endomorphisme, φ_I est un l-endomorphisme de A/I, car

$$\varphi_I(a_I \vee b_I) = (\varphi(a \vee b))_I = (\varphi a \vee \varphi b)_I = \varphi_I(a_I) \vee \varphi_I(b_I).$$

Ainsi nous avons le lemme suivant :

LEMME 2. — *Si φ est un orthomorphisme positif, et si I est un l-idéal de A stable par φ, alors φ induit un l-endomorphisme φ_I sur A/I.*

Le lemme suivant permettra de trouver suffisamment de l-idéaux premiers stables par un orthomorphisme positif donné. Rappelons d'abord une définition : Soit a un élément de A. On appelle *valeur de a* tout l-idéal maximal dans la famille des l-idéaux de A ne contenant pas a. Toute valeur de a est un l-idéal premier ([7], p. 26). Si Q est une valeur de a, nous désignerons par $Q^\star$ le l-idéal de A engendré par Q et a. Le groupe quotient $Q^\star/Q$ est totalement ordonné et archimédien, c'est-à-dire un groupe réel.

LEMME 3. — *Soient $a \in A^+$ et $\varphi \in \mathrm{Orth}(A)^+$. Si Q est une valeur de a telle que $\varphi a \in Q^\star$, alors Q et $Q^\star$ sont stables par φ.*

Démonstration. — Soit P un l-idéal premier minimal contenu dans Q. D'après la proposition 1, P est stable par φ. D'après le lemme 2, φ induit un l-endomorphisme φ_P sur le groupe totalement ordonné A/P. Puisque $\varphi a \in Q^\star$, il existe un entier n tel que $\varphi_P(a_P) \leqq n a_P$. Si c est un élément positif de Q, alors $m c_P \leqq a_P$ pour tout entier m, d'où l'on tire

$$m\,\varphi_P(c_P) \leqq \varphi_P(a_P) \leqq n a_P \quad \text{pour tout entier } m,$$

ce qui entraîne $\varphi_P(c_P) \in Q/P$, c'est-à-dire $\varphi c \in Q$. Si c est un élément positif de $Q^\star$, il y a un entier m tel que $c_P \leqq m a_P$, d'où l'on tire

$$\varphi_P(c_P) \leqq m\,\varphi_P(a_P) \leqq mn a_P,$$

ce qui entraîne $\varphi_P(c_P) \in Q^\star/P$, c'est-à-dire $\varphi c \in Q^\star$.

LEMME 4. — *Si A est archimédien et si a et c sont deux éléments de A, la polaire $a^\perp$ est l'intersection des valeurs Q de a telles que $c \in Q^*$.*

Démonstration. — En remplaçant a et c par $|a|$ et $|c|$, on peut supposer que a et c sont positifs. En remplaçant c par $a \vee c$, on peut supposer $a \leq c$. Dans ce cas, on a $c^\perp \subseteq a^\perp$. Soit x un élément positif de A non contenu dans $a^\perp$. Montrons qu'il existe une valeur Q de a ne contenant pas x, mais telle que $c \in Q^*$: Puisque $x \notin a^\perp$, on a $x \wedge a \notin a^\perp$ et, en particulier, $x \wedge a \notin c^\perp$. Puisque $c^\perp$ est l'intersection des valeurs de c ([2], théorème 2.6), il existe une valeur Q de c ne contenant pas $x \wedge a$. Il s'ensuit que Q ne contient ni x ni a, et que $c \in Q^*$. Puisque $a \leq c$, on a $a \in Q^*$, c'est-à-dire que Q est aussi une valeur de a.

Maintenant nous sommes prêts à démontrer le *théorème fondamental :*

THÉORÈME 1. — *L'ensemble* Orth(A) *des orthomorphismes d'un groupe réticulé archimédien est un f-anneau unitaire archimédien. Pour deux orthomorphismes positifs φ et ψ de A, $\varphi \vee \psi$ est donné par*

$$(\varphi \vee \psi) a = \varphi a \vee \psi a \quad \textit{pour tout } a \in A^+.$$

Démonstration. — Montrons d'abord que la propriété ($\bigstar$) du lemme 1 est vérifiée. Soient $\varphi, \psi \in \mathrm{Orth}(A)^+$, et $a, b \in A^+$. Soit Q une valeur de a telle que $b \vee \varphi a \vee \psi a$ soit contenu dans Q^*. Alors b, φa et ψa appartiennent à Q^*. D'après le lemme 3, Q et Q^* sont stables par φ et ψ. D'après le lemme 2, φ et ψ induisent des l-endomorphismes φ_Q et ψ_Q sur Q^*/Q. Puisque Q^*/Q est un groupe réel, il vérifie ($\bigstar$) d'après la proposition 3. Nous avons donc

$$\varphi_Q(a_Q + b_Q) \vee \psi_Q(a_Q + b_Q) = (\varphi_Q a_Q \vee \psi_Q a_Q) + (\varphi_Q b_Q \vee \psi_Q b_Q),$$

ou encore

$$(\varphi(a+b) \vee \psi(a+b))_Q = ((\varphi a \vee \psi a) + (\varphi b \vee \psi b))_Q.$$

Désignons par I la polaire $a^{\perp\perp}$. Puisque I est invariant par φ et ψ, les orthomorphismes positifs φ et ψ induisent des l-endomorphismes φ_I et ψ_I sur A/I, et l'on a

$$\varphi_I(a_I) = \psi_I(a_I) = 0_I;$$

donc

$$\varphi_I(a_I + b_I) \vee \psi_I(a_I + b_I) = \varphi_I b_I \vee \psi_I b_I = (\varphi_I a_I \vee \psi_I a_I) + (\varphi_I b_I \vee \psi_I b_I),$$

ou encore

$$(\varphi(a+b) \vee \psi(a+b))_I = ((\varphi a \vee \psi a) + (\varphi b \vee \psi b))_I.$$

L'intersection de la famille $\mathfrak{J}$ de l-idéaux, constituée par I et les valeurs Q de a tels que $b \vee \varphi a \vee \psi a \in Q^*$, est réduite à zéro d'après le lemme 4. Deux éléments x et y de A sont égaux si et seulement si $x_J = y_J$ pour tout $J \in \mathcal{J}$. Par conséquent, nous avons démontré

$$\varphi(a+b) \vee \psi(a+b) = (\varphi a \vee \psi a) + (\varphi b \vee \psi b).$$

D'après le lemme 1, Orth(A) est donc un f-anneau, et la borne supérieure de deux orthomorphismes positifs φ et ψ est donnée par

$$(\varphi \vee \psi) a = \varphi a \vee \psi a \quad \text{pour tout } a \in A^+.$$

De plus, Orth(A) est archimédien; car si φ, $\psi \in \text{Orth}(A)^+$, alors $n\varphi \leqq \psi$ entraîne $n\varphi a \leqq \psi a$ pour tout entier n quel que soit $a \in A^+$. Ainsi nous avons démontré le théorème.

Il est bien connu qu'un f-anneau archimédien est commutatif ([5], theorem 13) et qu'un f-anneau archimédien unitaire n'a pas d'élément nilpotent non nul ([9], lemme 2.1). Nous avons donc les corollaires suivants :

Corollaire 1. — *Deux orthomorphismes quelconques d'un groupe réticulé archimédien commutent.*

Corollaire 2. — *Tout orthomorphisme nilpotent d'un groupe réticulé archimédien est nul.*

Dorénavant, nous supposerons que le groupe réticulé considéré est archimédien.

Nous allons donner une représentation des orthomorphismes. La démonstration repose sur la représentation d'un groupe réticulé archimédien donné par Bernau [1]. Le résultat de Bernau peut être décrit comme suit :

Soit E l'espace de Stone dual de l'algèbre de Boole complète des polaires de A. Soit $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des fonctions continues f de E dans la droite réelle achevée, qui sont finies sur un sous-ensemble ouvert partout dense $\Phi(f)$ de E. Muni des opérations habituelles, $\mathcal{F}(E)$ est un f-anneau. Pour tout $f \in \mathcal{F}(E)$, désignons par $\Sigma(f)$ l'ensemble des θ de E tels que $f(\theta) \neq 0$. Le support $\overline{\Sigma(f)}$ de f est à la fois ouvert et fermé dans E. Si f et f' sont orthogonaux, leurs supports sont disjoints. Soit $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille maximale d'éléments positifs orthogonaux de A. Alors il existe un l-isomorphisme $a \mapsto \hat{a}$ de A sur un l-sous-groupe de $\mathcal{F}(E)$ tel que $\hat{e}_\lambda \leqq 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tel que la réunion des $\Sigma(\hat{e}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, est un ouvert partout dense de E.

Soit maintenant φ un orthomorphisme positif de A. Les éléments φe_λ sont deux à deux orthogonaux. Par conséquent, les supports des fonctions $\widehat{\varphi e_\lambda}$ sont deux à deux disjoints. Puisque $\Phi(\widehat{\varphi e_\lambda}) \cap \overline{\Sigma(\widehat{\varphi e_\lambda})}$ est un ouvert partout dense de l'ensemble ouvert et fermé $\overline{\Sigma(\widehat{\varphi e_\lambda})}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'intersection Φ des $\Phi(\widehat{\varphi e_\lambda})$ est un ouvert partout dense de E. Il existe donc $f \in \mathcal{F}(E)$ telle que, pour $\theta \in \Sigma(\hat{e}_\lambda) \cap \Phi$, on a

$$f(\theta) = \frac{\widehat{\varphi e_\lambda}(\theta)}{\hat{e}_\lambda(\theta)}.$$

Nous allons montrer que $\widehat{\varphi a} = f.\hat{a}$ pour tout $a \in A$. En fait, il suffit de montrer que l'égalité

$$\widehat{\varphi a}(\theta) = f(\theta)\,\hat{a}(\theta)$$

se vérifie sur une partie dense Ω de E. Prenons

$$\Omega = \left(\bigcup_\lambda \sum(\hat{e}_\lambda)\right) \cap \Phi(\hat{a}) \cap \Phi(f).$$

Si θ appartient à Ω, il existe un e_λ (unique) tel que $\theta \in \Sigma(\hat{e}_\lambda)$. L'ensemble $Q_\theta = \{ b \in A ;\ \hat{b}(\theta) = 0 \}$ est une valeur de e_λ, et $Q_\theta^\star = \{ b \in A ;\ |\hat{b}(\theta)| < \infty \}$. De plus, $\varphi e_\lambda \in Q^\star$, puisque $\theta \in \Phi(f)$; donc Q_θ et $Q_\theta^\star$ sont stables par φ d'après le lemme 3. Alors φ induit dans le groupe réel $Q_\theta^\star / Q_\theta$ un l-endomorphisme qui est nécessairement une homothétie du rapport $f(\theta)$. L'égalité souhaitée en résulte.

Nous avons ainsi montré, pour parler sommairement, que tout orthomorphisme est une homothétie. Inversement, toute homothétie dans $\mathcal{F}(E)$ définit un orthomorphisme de A, pourvu qu'elle laisse stable l'image de A dans $\mathcal{F}(E)$. En conclusion :

THÉORÈME 2. — *Soit j l'isomorphisme de A dans $\mathcal{F}(E)$ donné par le théorème de Bernau. Alors* Orth(A) *est l-isomorphe au sous-f-anneau de $\mathcal{F}(E)$ constitué par les f telles que $f.j(A) \subseteq j(A)$.*

2. **Propriétés des orthomorphismes.**

Nous allons établir quelques propriétés des orthomorphismes d'un groupe réticulé archimédien.

THÉORÈME 3. — *Pour tout orthomorphisme φ d'un groupe réticulé archimédien, on a* $\operatorname{Ker}\varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^\perp$. *En particulier,* $\operatorname{Ker}\varphi$ *est une polaire.*

Démonstration. — Supposons d'abord φ positif. Soit $0 \leqq c \in \operatorname{Ker}\varphi$, et soit $\varphi a \in \operatorname{Im}\varphi$ avec $a \geqq 0$. Posons $b = c \wedge \varphi a$. Si n est un entier positif, on peut écrire :

$$nb = (nb \wedge a) + u \qquad \text{et} \qquad a = (nb \wedge a) + v \qquad \text{avec} \quad u \wedge v = 0.$$

On a

$$b \leqq \varphi a = \varphi(nb \wedge a) + \varphi(v) = \varphi v \in v^{\perp\perp}.$$

Comme $u \leq nb$, il en résulte que $u \in v^{\perp\perp}$. Mais $u \in v^{\perp}$, donc $u = 0$. Par suite, on a $nb \leq a$, et ceci est vrai pour tout n, $b = 0$. On a ainsi établi que $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$. Revenant au cas général, on peut écrire

$$\varphi = (\varphi \vee 0) - (-\varphi \vee 0).$$

Il est clair que

$$\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}(\varphi \vee 0) \cap \operatorname{Ker}(-\varphi \vee 0).$$

Donc si $x \in \operatorname{Ker}\varphi$, on a, pour tout y,

$$(\varphi \vee 0)y \in x^{\perp} \quad \text{et} \quad (-\varphi \vee 0)y \in x^{\perp},$$

donc

$$\varphi y = (\varphi \vee 0)y - (-\varphi \vee 0)y \in x^{\perp},$$

d'où $x \in (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$. Inversement, si $x \in (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$, il vient $\varphi x \in x^{\perp}$. Mais $\varphi x \in x^{\perp\perp}$, donc $\varphi x = 0$, et par conséquent $x \in \operatorname{Ker}\varphi$.

COROLLAIRE 1. — *Un orthomorphisme est injectif si et seulement si son image est dense.*

COROLLAIRE 2. — *Tout orthomorphisme surjectif est un automorphisme.*

COROLLAIRE 3. — *Un orthomorphisme positif conserve les $\vee$ et les $\wedge$ infinis qui existent.*

Ceci résulte simplement du fait qu'une polaire est un l-idéal fermé ([6], lemme 4.4).

COROLLAIRE 4. — *Un orthomorphisme est déterminé par les valeurs qu'il prend sur une partie dense.*

En effet, soient φ et ψ deux orthomorphismes qui coïncident sur une partie dense K. On a $K \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi - \psi)$, donc $A = K^{\perp\perp} \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi - \psi)$, ce qui montre que φ et ψ coïncident sur A.

COROLLAIRE 5. — *Si A possède une unité faible e, un orthomorphisme φ est déterminé par φe, et* $\operatorname{Ker}\varphi = (\varphi e)^{\perp}$.

En effet, une unité faible constitue à elle seule une partie dense de A.

Plusieurs auteurs ont appelé *projecteurs* les projections de A sur ses facteurs directs. Évidemment, tout projecteur est un orthomorphisme idempotent. Inversement, soit ε un orthomorphisme idempotent. Alors $A = \varepsilon A + (1 - \varepsilon)A$. On vérifie immédiatement que $\operatorname{Ker}\varepsilon = \operatorname{Im}(1 - \varepsilon)$ et que $\operatorname{Ker}(1 - \varepsilon) = \operatorname{Im}\varepsilon$. Par conséquent, εA et $(1 - \varepsilon)A$ sont des polaires complémentaires de A, et A est la somme directe de εA et $(1 - \varepsilon)A$. En particulier, ε est un projecteur de A sur εA. Nous avons donc :

COROLLAIRE 6. — *Les projecteurs de A coïncident avec les orthomorphismes idempotents.*

Corollaire 7. — *Si* φ *et* ψ *sont deux orthomorphismes positifs, on a*

$$\operatorname{Ker}(\varphi \vee \psi) = \operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Ker}\psi; \qquad \operatorname{Ker}(\varphi \wedge \psi) = \operatorname{Ker}(\varphi\psi) = \operatorname{Ker}\varphi \vee \operatorname{Ker}\psi.$$

Démonstration. — $0 \leqq x \in \operatorname{Ker}(\varphi \vee \psi)$ équivaut à $\varphi x \vee \psi x = 0$, donc à $\varphi x = \psi x = 0$, d'où la première égalité.

Montrons que $\operatorname{Ker}(\varphi \wedge \psi) \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \vee \operatorname{Ker}\psi$ (ce $\vee$ est pris dans l'algèbre des polaires). Soit $0 \leqq x \in \operatorname{Ker}(\varphi \wedge \psi)$. Soit $0 \leqq z \in (\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp} \cap (\operatorname{Ker}\psi)^{\perp}$. Pour tout a et tout b positifs, on a

$$x \wedge \varphi a \wedge \psi b \leqq x \wedge \varphi(a \vee b) \wedge \psi(a \vee b) = 0,$$

car $x \in (\operatorname{Im}(\varphi \wedge \psi))^{\perp}$. Donc $x \wedge \varphi a \wedge \psi b = 0$. Il en résulte que

$$x \wedge \varphi a \in (\operatorname{Im}\psi)^{\perp} = \operatorname{Ker}\psi, \qquad \text{donc} \quad x \wedge \varphi a \wedge z = 0.$$

On en déduit

$$x \wedge z \in (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp} = \operatorname{Ker}\varphi, \qquad \text{donc} \quad x \wedge z = x \wedge z \wedge z = 0.$$

On voit que

$$x \in ((\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp} \cap (\operatorname{Ker}\psi)^{\perp})^{\perp} = \operatorname{Ker}\varphi \vee \operatorname{Ker}\psi.$$

Il est clair que $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi\varphi$ et $\operatorname{Ker}\psi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi\psi$. Mais $\varphi\psi = \psi\varphi$, donc $\operatorname{Ker}\varphi \vee \operatorname{Ker}\psi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi\psi$. Finalement,

$$\operatorname{Ker}\varphi\psi \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi \wedge \psi),$$

car $\varphi\psi(x) = 0$ implique $\psi x \in \operatorname{Ker}\varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$, donc

$$\psi x \wedge \varphi x = 0.$$

Considérons maintenant les automorphismes positifs du groupe A qui conservent les polaires.

Proposition 4. — *Les automorphismes positifs conservant les polaires de* A *forment un groupe réticulé archimédien.*

Les automorphismes positifs conservant les polaires sont exactement les éléments positifs inversibles de $\operatorname{Orth}(A)$. La proposition 4 est donc une conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme 5. — *Soit* A *un f-anneau unitaire. Les éléments positifs inversibles de* A *forment un groupe réticulé qui est archimédien, si* A *est archimédien.*

Démonstration. — On voit sans peine que les éléments positifs inversibles d'un anneau totalement ordonné forment un groupe. Si a est un élément positif inversible de A, alors a^{-1} est positif dans toute image homomorphe totalement ordonnée de A; par conséquent, a^{-1} est positif dans A. Si a et b sont deux éléments positifs inversibles de A, alors $a^{-1} \wedge b^{-1}$ est l'inverse de $a \vee b$ dans toute image homomorphe totalement ordonnée de A; par conséquent, $a^{-1} \wedge b^{-1}$ est l'inverse de $a \vee b$. Les éléments positifs inversibles de A forment donc un groupe réticulé. Supposons que l'on ait $1 < a$ et $a^n < b$. Soit $a' = a - 1$. Alors

$$0 < na' < (1 + a')^n = a^n < b.$$

Par suite, on ne peut pas avoir $1 < a^n < b$ pour tout entier positif n, si A est archimédien. Le groupe réticulé des éléments positifs inversibles est donc archimédien si A est archimédien.

3. **Contracteurs et orthomorphismes bornés.**

Dans cette section, nous examinerons deux classes particulières d'orthomorphismes d'un groupe réticulé archimédien A.

Définition. — Nous dirons qu'un orthomorphisme φ de A est un *contracteur positif si*, pour tout $x \in A^+$, il existe un entier n tel que $0 \leqq \varphi x \leqq nx$. Il revient au même de dire que φ est positif et que tout l-idéal est stable par φ. En particulier, φ conserve les polaires, donc c'est un orthomorphisme. Soit $\mathcal{C}(A)$ le sous-groupe engendré par les contracteurs positifs. Nous appellerons *contracteurs* les éléments de $\mathcal{C}(A)$.

Théorème 4. — *Les contracteurs d'un groupe réticulé archimédien forment un sous-f-anneau convexe unitaire de* Orth(A).

Démonstration. — Pour tout $a \in A$, soit $C(a)$ le l-idéal engendré par a. Soient φ et ψ deux contracteurs positifs. On a, pour tout $a \geqq 0$,

$$0 \leqq \varphi a + \psi a \in C(a) \qquad \text{et} \qquad 0 \leqq (\varphi \vee \psi) a = \varphi a \vee \psi a \in C(a)$$

et, de plus, $0 \leqq \varphi\psi a \in C(\psi a) \subseteq C(a)$; donc $\varphi + \psi$, $\varphi \vee \psi$ et $\varphi\psi$ sont des contracteurs positifs, ce qui entraîne que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-f-anneau de Orth (A). La convexité est évidente.

Si un groupe réticulé est hyper-archimédien, $C(a) = a^{\perp\perp}$ pour tout $a \in A$. Par conséquent, $\mathrm{Orth}(A) = \mathcal{C}(A)$ pour tout groupe réticulé hyper-archimédien.

On appelle *squelette* de A l'ensemble des l-idéaux, valeurs d'au moins un élément de A.

Proposition 5. — *Si* Γ *désigne le squelette du groupe réticulé archi médien A, il existe un l-isomorphisme de* $\mathcal{C}(A)$ *dans* $\mathbf{R}^\Gamma$.

Démonstration. — Pour tout $Q \in \Gamma$, identifions Q^*/Q avec un sous-groupe de $\mathbf{R}$. Si φ est un contracteur positif, Q^* et Q sont stables par φ. Donc φ induit un l-endomorphisme de Q^*/Q, qui est nécessairement une homothétie. Désignons par $\tau_Q(\varphi)$ le rapport de cette homothétie. On voit immédiatement que τ_Q est un l-homomorphisme de $\mathcal{C}(A)$ sur un anneau réel. Il reste à montrer que l'application $\varphi \mapsto (\tau_Q(\varphi))_{Q \in \Gamma}$ de $\mathcal{C}(A)$ dans $\mathbf{R}^\Gamma$ est injective. Or, si $\varphi \neq 0$, il existe un a tel que $\varphi a \neq 0$; donc $\varphi a \notin a^\perp$. Comme $a^\perp$ est l'intersection des valeurs de a, il existe une valeur Q de a telle que $\varphi a \notin Q$. Par suite, $\tau_Q(\varphi) \neq 0$.

Définition. — Un endomorphisme positif φ de A est dit *borné*, s'il existe un entier n tel que, pour tout $x \in A^+$, $\varphi x \leqq nx$. Il est clair que tout endomorphisme positif borné est un contracteur majoré par un certain multiple $n\,1$ de l'endomorphisme identique. Inversement, tout endomorphisme positif majoré par $n\,1$ pour un certain entier n, est borné. Soit $\mathcal{B}(A)$ le sous-groupe engendré par les endomorphismes positifs bornés.

Proposition 6. — *$\mathcal{B}(A)$ est un sous-f-anneau convexe unitaire de $\mathcal{C}(A)$ et de* Orth(A).

La démonstration de la proposition est immédiate. Puisque $\mathcal{B}(A$, contient l'élément unité de Orth(A), et puisque l'élément unité d'un f-anneau est toujours une unité faible, $\mathcal{B}(A)$ est dense dans Orth(A). Puisque $\mathcal{B}(A)$ est convexe dans Orth(A), l'application du lemme 2.1 de [2] donne :

Corollaire 1. — *Tout orthomorphisme positif est borne supérieure d'endomorphismes positifs bornés.*

Corollaire 2. — *Si A possède une unité forte e,* $\mathcal{B}(A) = \text{Orth}(A)$.

En effet, pour tout $\varphi \in \text{Orth}(A)^+$, il existe un entier n tel que $\varphi e \leqq ne$. D'après le corollaire 5 du théorème 3, $(\varphi \wedge n\,1)e = \varphi e$ entraîne $\varphi \wedge n\,1 = \varphi$, c'est-à-dire que φ est borné.

4. Propriétés de transfert.

Maintenant nous allons considérer les propriétés d'un groupe réticulé archimédien A reflétées par Orth(A); sauf indication contraire, les résultats sont aussi valables pour $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{B}(A)$.

Proposition 7. — *Il y a une correspondance bijective entre les facteurs directs de A et les facteurs directs de* Orth(A).

Démonstration. — L'application $\varepsilon \mapsto \varepsilon\,\text{Orth}(A)$ est une bijection entre les idempotents de Orth(A) et les facteurs directs de Orth(A). En effet, si l'on associe à tout facteur direct B de Orth(A) la projection sur B de l'élément unité de Orth(A), on a défini une application inverse de $\varepsilon \mapsto \varepsilon\, \mathrm{Orth}(A)$. D'après le corollaire 6 du théorème 3, les idempotents de $\mathrm{Orth}(A)$ correspondent bijectivement aux projecteurs de A. Puisque le treillis des l-idéaux de A est distributif, tout projecteur est déterminé par son image qui est un facteur direct de A.

Supposons maintenant que A soit la somme directe d'une famille $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de l-idéaux. Soit ε_λ la projection de A sur A_λ. Pour tout $\varphi \in \mathrm{Orth}(A)$, l'application composée $\varepsilon_\lambda\varphi$ définit un orthomorphisme de A_λ. On peut donc définir une application de $\mathrm{Orth}(A)$ dans $\prod_\lambda \mathrm{Orth}(A_\lambda)$ par $\varphi \mapsto (\varepsilon_\lambda\varphi)_\lambda$. Cette application est un l-homomorphisme injectif de f-anneaux. Il est surjectif; car tout $(\varphi_\lambda)_\lambda \in \prod_\lambda \mathrm{Orth}(A_\lambda)$ définit un orthomorphisme φ sur $\sum_\lambda A_\lambda$ par $\varphi((a_\lambda)_\lambda) = (\varphi_\lambda a_\lambda)_\lambda$ qui vérifie $\varepsilon_\lambda\varphi = \varphi_\lambda$. Le même raisonnement est valable pour $\mathcal{C}(A)$, mais non pour $\mathcal{B}(A)$. De la même façon, on montre que $\mathrm{Orth}(A)$ est le produit des $\mathrm{Orth}(A_\lambda)$ si A est le produit direct des A_λ. Ceci n'est pas vrai pour $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{B}(A)$. Nous avons alors le résultat suivant :

PROPOSITION 8. — $\mathrm{Orth}\left(\sum_\lambda A_\lambda\right) = \mathrm{Orth}\left(\prod_\lambda A_\lambda\right) = \prod_\lambda \mathrm{Orth}(A_\lambda)$.

On dit que A est *projectable* si toute polaire principale $a^{\perp\perp}$ est un facteur direct de A.

PROPOSITION 9. — *Si A est projectable, il en est de même de* $\mathrm{Orth}(A)$.

Démonstration. — Soient φ un orthomorphisme et a un élément de A. D'après l'hypothèse, A est la somme directe de $(\varphi a)^{\perp\perp}$ et $(\varphi a)^{\perp}$. Si ε désigne la projection de A sur $(\varphi a)^{\perp\perp}$, on a

$$\varphi\varepsilon a = \varepsilon\varphi a = \varphi a,$$

ce qui entraîne

$$(1-\varepsilon)\varphi a = \varphi(1-\varepsilon)a = 0,$$

donc $(1-\varepsilon)a \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Puisque $\varepsilon a \in (\varphi a)^{\perp\perp}$, on a donc

$$a = \varepsilon a + (1-\varepsilon)a \in (\mathrm{Im}\,\varphi)^{\perp\perp} + \mathrm{Ker}\,\varphi.$$

Ceci étant vrai pour tout a, $A = (\mathrm{Im}\,\varphi)^{\perp\perp} + \mathrm{Ker}\,\varphi$. A l'aide du théorème 3, on déduit que A est la omme directe de $(\mathrm{Im}\,\varphi)^{\perp\perp}$ et $\mathrm{Ker}\,\varphi$ Soit η la projection de A sur $(\mathrm{Im}\,\varphi)^{\perp\perp}$. Alors $\eta^\perp = \varphi^\perp$; car $\varphi \wedge \psi = 0$ est équivalent à

$$\mathrm{A} = \mathrm{Ker}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{Ker}\,\varphi \vee \mathrm{Ker}\,\psi$$

d'après le corollaire 7 du théorème 3, ou encore à

$$0 = A^\perp = (\mathrm{Ker}\,\varphi \vee \mathrm{Ker}\,\psi)^\perp = (\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp \cap (\mathrm{Ker}\,\psi)^\perp = (\mathrm{Im}\,\varphi)^{\perp\perp} \cap (\mathrm{Im}\,\psi)^{\perp\perp};$$

de même, $\eta \wedge \psi = 0$ est équivalent à $(\mathrm{Im}\,\eta)^{\perp\perp} \cap (\mathrm{Im}\,\psi)^{\perp\perp} = 0$, et nous avons $\mathrm{Im}\,\eta = (\mathrm{Im}\,\varphi)^{\perp\perp}$. Puisque η est idempotent, $\eta^{\perp\perp} = \eta\,\mathrm{Orth}(A)$ est un facteur direct de $\mathrm{Orth}(A)$.

Un groupe hyper-archimédien A est projectable. D'après la proposition 9, $\mathrm{Orth}(A)$ est donc projectable. Mais en général $\mathrm{Orth}(A)$ n'est pas hyper-archimédien : Pour tout λ d'un ensemble infini Λ soit R_λ isomorphe à $\mathbf{R}$. Alors $A = \sum_\lambda R_\lambda$ est hyper-archimédien. Mais $\mathrm{Orth}(A) = \prod_\lambda R_\lambda$ n'est pas hyper-archimédien. On a cependant la proposition suivante :

PROPOSITION 10. — *Si A est un groupe réticulé hyper-archimédien ayant une unité faible e, alors* $\mathrm{Orth}(A)$ *est un f-anneau hyper-archimédien.*

Démonstration. — Soit φ un orthomorphisme positif et soit $0 \leq \psi \in \varphi^{\perp\perp}$. Alors $\psi e \in (\varphi e)^{\perp\perp}$. Puisque A est hyper-archimédien, $(\varphi e)^{\perp\perp}$ coïncide avec le l-idéal engendré par φe. Il existe donc un entier n tel que $\psi e \leq n\varphi e$. On en tire $\psi \leq n\varphi$ d'après le corollaire 5 du théorème 3. Par conséquent, $\varphi^{\perp\perp}$ coïncide avec le l-idéal engendré par φ, et $\varphi^{\perp\perp}$ est un facteur direct de $\mathrm{Orth}(A)$ d'après la proposition 9.

Un élément $a > 0$ d'un groupe réticulé A est dit *basique*, si l'ensemble des x de A compris entre 0 et a est totalement ordonné. Dans un groupe réticulé archimédien, $a > 0$ est basique si et seulement si $a^{\perp\perp}$ est un facteur direct de A et un groupe réel.

Une famille maximale d'éléments orthogonaux $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est appelée *base* de A, si chacun des a_λ est basique.

PROPOSITION 11. — *Si A admet une base, il en est de même de* $\mathrm{Orth}(A)$.

Démonstration. — Soit $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une base de A. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit ε_λ la projection de A sur $a_\lambda^{\perp\perp}$. D'après la proposition 3, $\mathrm{Orth}(a_\lambda^{\perp\perp})$ est un anneau réel. D'autre part, $\mathrm{Orth}(a_\lambda^{\perp\perp}) = \varepsilon_\lambda\,\mathrm{Orth}(A)$ est un facteur direct de $\mathrm{Orth}(A)$. Par conséquent, ε_λ est basique dans $\mathrm{Orth}(A)$. Les images des ε_λ étant orthogonales, $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille d'orthomorphismes orthogonaux. Montrons qu'elle est une base : Soit $\varphi > 0$. Il existe un a tel que $\varphi a > 0$. Puisque $(a_\lambda)_\lambda$ est une base de A, il existe un λ tel que $\varphi a \wedge a_\lambda > 0$, donc aussi $a \wedge a_\lambda > 0$. On en déduit que $\varepsilon_\lambda a \neq 0$, donc $(\varepsilon_\lambda a)^{\perp\perp} = (a_\lambda)^{\perp\perp}$. Si l'on avait $\varphi \wedge \varepsilon_\lambda = 0$, on aurait aussi $\varphi a \wedge \varepsilon_\lambda a = 0$, c'est-à-dire $\varphi a \wedge a_\lambda = 0$.

PROPOSITION 12. — *Si A est un produit sous-direct de groupes réels (resp. de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}$),* $\mathrm{Orth}(A)$ *est un produit sous-direct d'anneaux réels (resp. d'anneaux isomorphes à $\mathbf{Z}$).*

Démonstration. — Soit $A \to \prod_\lambda A/M_\lambda$ une représentation sous-directe de A avec A/M_λ réel (resp. isomorphe à $\mathbf{Z}$). Chaque M_λ est un l-idéal maximal, donc stable par tout orthomorphisme φ d'après le lemme 3. Par suite, φ induit un orthomorphisme φ_λ sur A/M_λ et $\varphi \mapsto \varphi_\lambda$ est un l-homomorphisme de f-anneaux de $\mathrm{Orth}(A)$ dans $\mathrm{Orth}(A/M_\lambda)$. On en déduit une représentation sous-directe $\varphi \mapsto (\varphi_\lambda)_\lambda$ de $\mathrm{Orth}(A)$ dans $\prod_\lambda \mathrm{Orth}(A/M_\lambda)$ et $\mathrm{Orth}(A/M_\lambda)$ est un anneau réel (resp. un anneau isomorphe à $\mathbf{Z}$).

La proposition suivante n'est vraie ni pour $\mathcal{C}(A)$, ni pour $\mathcal{B}(A)$, dans le cas latéralement complet.

Proposition 13. — *Si A est complet (resp. σ-complet, resp. latéralement complet), il en est de même de* $\mathrm{Orth}(A)$.

Démonstration. — La démonstration étant analogue dans les trois cas, nous nous bornerons au cas où A est complet. Soit $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'orthomorphismes positifs. Pour $x \geq 0$, posons $\varphi x = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda x$. Il est clair que $\varphi x \in x^{\perp\perp}$. Montrons que $\varphi(a+b) = \varphi a + \varphi b$ sur A^+. On a

$$\varphi(a+b) = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(a+b) \geq \bigwedge_{\lambda,\mu\in\Lambda} (\varphi_\lambda a + \varphi_\mu b)$$
$$= \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda a + \bigwedge_{\mu\in\Lambda} \varphi_\mu b = \varphi a + \varphi b.$$

D'autre part,

$$\varphi_\lambda a + \varphi_\mu b \geq (\varphi_\lambda \wedge \varphi_\mu) a + (\varphi_\lambda \wedge \varphi_\mu) b = (\varphi_\lambda \wedge \varphi_\mu)(a+b) \geq \varphi(a+b),$$

donc

$$\varphi a + \varphi b = \bigwedge_{\lambda,\mu\in\Lambda} (\varphi_\lambda a + \varphi_\mu b) \geq \varphi(a+b).$$

Il suffit maintenant d'étendre φ par linéarité pour obtenir une borne inférieure de la famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans $\mathrm{Orth}(A)$.

Un groupe réticulé est dit *ortho-complet*, s'il est latéralement complet et projectable. Compte tenu de la proposition 9, on obtient le corollaire suivant [qui n'est vrai ni pour $\mathcal{C}(A)$, ni pour $\mathcal{B}(A)$] :

Corollaire. — *Si A est ortho-complet, il en est de même de* $\mathrm{Orth}(A)$.

5. Applications aux *f*-anneaux.

Dans ce qui suit, soit A un *f*-anneau archimédien sans élément nilpotent non nul. Pour tout élément a de A, notons φ_a l'homothétie $x \mapsto ax$ de A. Puisque A est un *f*-anneau, φ_a est un orthomorphisme positif pour tout $a \in A^+$. Si a est un élément quelconque de A, alors $\varphi_a = \varphi_{a \vee 0} - \varphi_{-a \vee 0}$ et, par conséquent, toute homothétie φ_a est un orthomorphisme. L'application $a \mapsto \varphi_a$ est un *l*-homomorphisme de *f*-anneaux de A dans $\mathrm{Orth}(A)$. Puisque A n'a pas d'élément nilpotent non nul, cet homomorphisme est injectif. Ainsi nous avons démontré la proposition suivante :

Proposition 14. — *Si A est un f-anneau archimédien sans élément nilpotent non nul,* $\mathrm{Orth}(A)$ *est un f-anneau archimédien unitaire contenant un sous-f-anneau isomorphe à A.*

Corollaire (D. G. Johnson, [9], théorème 5.1). — *Tout f-anneau archimédien sans élément nilpotent non nul peut être plongé dans un f-anneau archimédien unitaire.*

Une application φ de A dans lui-même est appelée *homothétie généralisée*, si elle vérifie $\varphi(ab) = (\varphi a) b$ pour tout $a, b \in A$. Le *centroïde* de A est l'ensemble des homothéties généralisées de A. Dans [11], il a été démontré que le centroïde d'un *f*-anneau sans élément nilpotent non nul est lui-même un *f*-anneau.

Théorème 5. — *Si A est un f-anneau archimédien sans élément nilpotent non nul, le centroïde de A coïncide avec* $\mathrm{Orth}(A)$.

Démonstration. — Il suffit de vérifier que les éléments positifs des deux anneaux en question coïncident. Soit d'abord φ une homothétie généralisée positive. D'après [10], φ est un endomorphisme du groupe sous-jacent à A. Si $a \wedge b = 0$, alors $ab = 0$, d'où $\varphi(ab) = (\varphi a) b = 0$, ce qui entraîne $\varphi a \wedge b = 0$; car dans un *f*-anneau sans élément nilpotent non nul, $ab = 0$ est équivalent à $a \wedge b = 0$. Par conséquent, φ est un orthomorphisme. Inversement, soit φ un orthomorphisme de A. Pour tout élément b de A, on a

$$\varphi_b \varphi = \varphi \varphi_b \quad \text{(corollaire 1 du théorème 1).}$$

Si a est un élément quelconque de A, on a donc

$$\varphi_b(\varphi a) = \varphi(\varphi_b a),$$

c'est-à-dire

$$(\varphi a) b = b(\varphi a) = \varphi(ab).$$

Corollaire 1. — *Les f-anneaux A et* $\mathrm{Orth}(A)$ *sont l-isomorphes si et seulement si A est unitaire.*

En effet, toute homothétie généralisée est de la forme φ_a, $a \in A$, si et seulement si A est unitaire [10].

Corollaire 2. — *Deux f-anneaux archimédiens unitaires, dont les groupes réticulés sous-jacents sont l-isomorphes, sont des f-anneaux l-isomorphes.*

En effet, un f-anneau archimédien unitaire A est l-isomorphe à $\mathrm{Orth}(A)$, et la multiplication de A n'intervient pas dans la construction de $\mathrm{Orth}(A)$.

Regardons maintenant si un groupe réticulé archimédien A peut être muni d'une multiplication qui en fait un f-anneau. Soit a un élément positif quelconque de A. D'après le théorème 1, $\varphi \mapsto \varphi a$ est un l-homomorphisme du groupe réticulé sous-jacent à $\mathrm{Orth}(A)$ dans A. Le noyau de cet l-homomorphisme est même un idéal de l'anneau $\mathrm{Orth}(A)$. Par conséquent, l'image peut être munie d'une multiplication qui en fait un f-anneau. Si a est une unité faible de A, alors $\varphi \mapsto \varphi a$ est injectif, d'après le corollaire 5 du théorème 3. Inversement, si $\varphi \mapsto \varphi a$ est surjectif, a est une unité faible; en effet, si $\varphi \mapsto \varphi a$ est surjectif, alors $A = a^{\perp\perp}$, puisque $\varphi a \in a^{\perp\perp}$ pour tout φ. Ainsi nous avons démontré la proposition suivante:

Proposition 15. — *Un groupe archimédien A peut être muni d'une multiplication qui en fait un f-anneau unitaire, si et seulement s'il possède un élément positif a tel que tout élément de A est égal à φa pour au moins un orthomorphisme φ. Cette multiplication est unique, si l'on demande que a devienne élément unité.*

Utilisant le fait qu'un anneau réticulé archimédien unitaire, dont l'élément unité est une unité faible, est un f-anneau ([5], corollaire 3 du théorème 15), on en tire le corollaire suivant :

Corollaire. — *Un groupe réticulé archimédien ayant une unité faible e possède au plus une multiplication qui en fait un anneau réticulé, ayant e comme élément unité.*

Remarquons encore que Rice [12] a démontré qu'un espace vectoriel réticulé complet et latéralement complet possède effectivement une multiplication qui en fait un f-anneau. Le même résultat est contenu implicitement dans le mémoire de Bernau ([1], p. 617). On obtient la même conclusion pour un groupe réticulé σ-complet ayant une unité forte, si l'on utilise le théorème de représentation de M. H. Stone ([15], theorem 3).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bernau (S. J.). — Unique représentation of archimedean lattice groups and normal archimedean lattice rings, *Proc. London math. Soc.*, t. 15, 1965, p. 599-631.

[2] Bigard (A.). — Groupes archimédiens et hyper-archimédiens, *Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres*, 21e année, 1967-1968, n° 2, 13 pages.

[3] Bigard (A.). — *Thèse Sc. math.*, Paris, 1969.

[4] Birkhoff (G.). — *Lattice theory*, 3rd edition. — Providence, American mathematical Society, 1967 (*American mathematical Society, Colloquium Publications*, 25).

[5] Birkhoff (G.) and Pierce (R. S.). — Lattice-ordered rings, *Anais Acad. brasil. Ciencias*, t. 28, 1956, p. 41-69.

[6] Byrd (R. D.). — Complete distributivity in lattice-ordered groups, *Pacific J. Math.*, t. 20, 1967, p. 423-432.

[7] Conrad (P. F.). — *Introduction à la théorie des groupes réticulés.* — Paris, Secrétariat mathématique, 1967.

[8] Fuchs (L.). — *Partially ordered algebraic systems.* — Oxford, London, New York, Paris, Pergamon Press, 1963 (*International Series of monographs in pure and applied mathematics*, 28).

[9] Johnson (D. G.). — On a representation theory for a class of archimedean lattice ordered rings, *J. London math. Soc.*, t. 12, 1962, p. 207-225.

[10] Johnson (B. E.). — An introduction to the theory of centralizers, *Proc. London math. Soc.*, t. 14, 1964, p. 299-320.

[11] Keimel (K.). — Le centroïde et le bicentroïde de certains anneaux réticulés, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 267, 1968, série A, p. 589-591.

[12] Rice (N. M.). — Multiplication in vector lattices, *Canadian J. Math.*, t. 20, 1968, p. 1136-1149.

[13] Šik (F.). — Sur la théorie des groupes réticulés [en russe], *Czechosl. math. J.*, t. 6, 1956, p. 1-25.

[14] Šik (F.). — Estrutura y realisaziones de grupos reticulados, *Rev. Mem. Fac. Ci. La Habana*, Ser. Mat., t. 1, 1964, n° 3, p. 1-29.

[15] Stone (M. H.). — A general theory of spectra, II, *Proc. Nat. Acad. Sc.* U.S.A., t. 27, 1941, p. 83-87.

(Texte reçu le 9 décembre 1968.)

Alain Bigard
2, rue Étienne Marey
75-Paris 20

Klaus Keimel
22, rue des Bas-Longchamps
92-Bagneux