

RAIRO

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

COLETTE PICARD

Analyse limite d'équations variationnelles dans un domaine contenant une grille

RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique,
tome 21, n° 2 (1987), p. 293-326.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1987__21_2_293_0

© AFCET, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**ANALYSE LIMITE D'ÉQUATIONS VARIATIONNELLES
 DANS UN DOMAINE CONTENANT UNE GRILLE (*)**

par Colette PICARD ⁽¹⁾

Communiqué par E. SANCHEZ PALENCIA

Résumé. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N contenant une grille plane Σ , dont les perforations T_ε , de taille r_ε , sont périodiquement réparties avec la période ε .

Le but de cet article est, d'une part, d'étudier le comportement limite, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et selon les valeurs de r_ε , de la solution u_ε du problème de Dirichlet dans $\Omega \setminus T_\varepsilon$ ou de Neumann dans $(\Omega \setminus \Sigma) \cup T_\varepsilon$, ainsi que de problèmes unilatéraux associés, par une méthode d'épi-convergence, et, d'autre part, dans le cas où r_ε est proportionnel à ε , de déterminer la vitesse de convergence de u_ε dans Ω et sur Σ .

Abstract. — Let Ω be an open set in \mathbb{R}^N containing a plane sieve Σ with holes T_ε of size r_ε which are ε -periodically distributed.

The purpose of this paper is, on one hand, to study the limiting behavior, as ε tends to zero, according to the values of r_ε , of the solution u_ε of the Dirichlet problem in $\Omega \setminus T_\varepsilon$ or the Neumann problem in $(\Omega \setminus \Sigma) \cup T_\varepsilon$, or some related unilateral problems, by means of the epi-convergence method, and on the other hand to obtain the rate of convergence as ε tends to zero of u_ε in Ω and on Σ in the case that r_ε is proportional to ε .

1. INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 3$) partagé par une variété plane Σ qui est perforée de petits trous T_ε^j répartis périodiquement avec la période ε et homothétiques d'une partie fixe T de \mathbb{R}^{N-1} dans l'homothétie de rapport $r_\varepsilon < \varepsilon (\text{diam } T)^{-1}$; soit T_ε leur réunion et Ω_1 et Ω_2 les ouverts tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Sigma$.

On considère les problèmes de Dirichlet dans $\Omega \setminus T_\varepsilon$ et de Neumann dans $(\Omega \setminus \Sigma) \cup T_\varepsilon$ suivants :

$$(D_\varepsilon) \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega \setminus T_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } T_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(*) Reçu en janvier 1986.

⁽¹⁾ U.E.R. de Mathématiques, 33, rue Saint-Leu, 80039 Amiens, Cedex, et Laboratoire d'Analyse Numérique, Université de Paris-Sud, Bât. 425, 91405 Orsay.

$$(N_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup T_\varepsilon \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma \setminus T_\varepsilon \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le but de cet article est de déterminer le comportement limite de la solution u_ε de chacun des problèmes (D_ε) et (N_ε) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, selon la valeur de r_ε . Les méthodes utilisées sont de deux types : ou bien effectuer un passage à la limite sur les équations variationnelles en introduisant des fonctions tests adéquates, ou bien trouver l'épi-limite des fonctionnelles énergie. Les deux problèmes (D_ε) et (N_ε) sont traités en parallèle grâce à l'analogie que présentent les contraintes imposées sur Σ ; elles sont en effet de la forme : $v|_\Sigma = 0$ sur T_ε pour (D_ε) et $[v]_\Sigma = 0$ sur T_ε pour (N_ε) (en désignant par $[\]_\Sigma$ le saut à la traversée de Σ de Ω_1 vers Ω_2).

D'abord (cf. § 2) les problèmes limites de (D_ε) et (N_ε) sont déterminés en traduisant la convergence de ces problèmes en termes d'épi-convergence — ou Γ -convergence de De Giorgi — de familles de fonctionnelles. Selon la valeur de r_ε par rapport à la valeur critique $r_\varepsilon^c = \varepsilon^{N-1/N-2}$, le problème limite a trois formes possibles : lorsque $r_\varepsilon \gg r_\varepsilon^c$, c'est-à-dire lorsque les perforations sont « grosses » relativement à ε , la contrainte s'impose sur Σ tout entier dans le problème limite ; lorsque $r_\varepsilon \ll r_\varepsilon^c$, c'est-à-dire lorsque les perforations sont « petites », la contrainte sur Σ disparaît du problème limite ; lorsque $r_\varepsilon \approx r_\varepsilon^c$, le problème limite présente une condition de type « transmission » sur Σ de la forme :

$$Cu|_\Sigma = - \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_\Sigma, \quad \text{pour le problème limite de } (D_\varepsilon).$$

$$\frac{1}{4} C [u]_\Sigma = - \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_\Sigma, \quad \text{pour le problème limite de } (N_\varepsilon).$$

Cette valeur critique r_ε^c a été obtenue par E. Sanchez-Palencia (cf. [16]) par une méthode de développements asymptotiques. Les problèmes de Dirichlet dans des domaines avec trous ont été étudiés par plusieurs auteurs (cf. [11, 5, 4, 1]). Dans [7] et [2], le comportement limite de (N_ε) est étudié par la méthode variationnelle. La méthode d'épi-convergence développée ici a l'avantage de donner aussi (moyennant des adaptations faciles des démonstrations) les problèmes limites de problèmes unilatéraux associés avec contraintes sur T_ε du type $v|_\Sigma \geq 0$ ou $[v]_\Sigma \geq 0$ ou $[v]_\Sigma = 0$ et $v|_\Sigma \geq 0$. De plus la valeur des correcteurs est obtenue aussi bien pour les problèmes bilatéraux $(\overline{D}_\varepsilon)$ et (N_ε) que pour les problèmes unilatéraux précédents.

Le cas de l'homogénéisation — cas où r_ε est proportionnel à ε — est plus

particulièrement étudié au § 3. La méthode des développements asymptotiques (cf. J. L. Lions [10]) a été utilisée dans des situations voisines par E. Sanchez-Palencia (cf. [17]) pour des problèmes d'écoulements lents d'un fluide visqueux incompressible à travers une paroi perforée et par G. Nguetseng (cf. [13]) pour des problèmes d'écrans perforés. Ici une méthode variationnelle est présentée et elle permet de déterminer la rapidité de convergence de $u_\varepsilon|_\Sigma$ (resp. $[u_\varepsilon]_\Sigma$) vers zéro, ainsi que celle de l'énergie de $u_\varepsilon - u$, où u est solution du problème limite.

2. COMPORTEMENT LIMITE DE (D_ε) ET (N_ε) LORSQUE $\varepsilon \rightarrow 0$ ET DE PROBLÈMES VARIATIONNELS UNILATÉRAUX ASSOCIÉS

Le concept d'épi-convergence — ou de Γ -convergence de De Giorgi — (cf. [9 et 1]) s'est révélé être un outil particulièrement bien adapté à l'étude du comportement limite de problèmes de minimisation. Plus précisément, soit $\tau - X$ un espace muni d'une topologie τ métrisable, F, F_n une suite de fonctions de X dans \mathbb{R} et G une fonction continue sur $\tau - X$. On suppose que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\inf_{x \in X} (F_n(x) + G(x)) = \inf_{x \in K} (F_n(x) + G(x))$$

où K est une partie compacte de $\tau - X$. Alors la propriété

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{x \in X} (F_n(x) + G(x)) \rightarrow \inf_{x \in X} (F(x) + G(x)) \\ (x_n \in \text{Arg min } (F_n + G), \exists n_k : x_{n_k} \rightarrow x) \Rightarrow x \in \text{Arg min } (F + G) \end{array} \right.$$

est impliquée par la propriété : F_n épi-converge vers F dans $\tau - X$, que l'on note $(\tau - X) \lim_\varepsilon F_n = F$ et qui est caractérisée par les deux assertions :

- (i) $\forall x \in X \exists x_n \rightarrow x : F(x) \cong \limsup F_n(x)$
- (ii) $x_n \rightarrow x \Rightarrow F(x) \leq \liminf F_n(x)$.

2.1. Comportement limite de (D_ε) et (N_ε)

Exprimons d'abord (D_ε) et (N_ε) sous forme de problème de minimisation. Le problème (D_ε) se ramène au problème de minimisation

$$(M_\varepsilon^D) \text{ Min } \left\{ \int_\Omega |Dv|^2 dx - 2 \int_\Omega fv dx ; v \in H_0^1(\Omega), v|_\Sigma = 0 \text{ sur } T_\varepsilon \right\}$$

où $v|_\Sigma$ désigne la trace de v sur Σ .

Le problème (N_ε) s'écrit

$$\text{Min} \left\{ \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 - 2 \int_{\Omega} f v \, dx ; v \in H^1(\Omega_\varepsilon) \right\}.$$

Dans le but de minimiser sur un espace fixe, on introduit l'espace $V = H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ muni de la norme hilbertienne produit. On a la caractérisation suivante :

$$v \in H^1(\Omega_\varepsilon) \Leftrightarrow v = (v_1, v_2) \in V \quad \text{et} \quad [v]_{\Sigma} = v_1|_{\Sigma} - v_2|_{\Sigma} = 0 \quad \text{sur} \quad T_\varepsilon.$$

Ainsi, le problème précédent équivaut à

$$(M_\varepsilon^N) \text{ Min} \left\{ \|v\|_V^2 - 2 \int_{\Omega} f v \, dx ; v \in V, [v]_{\Sigma} = 0 \text{ sur } T_\varepsilon \right\}.$$

Comme les solutions u_ε de (M_ε^D) (resp. (M_ε^N)) sont bornées dans $H_0^1(\Omega)$ (resp. V), la suite (u_ε) est relativement compacte dans $w - H_0^1(\Omega)$ (resp. $w - W$). Étudier la convergence de (M_ε^D) (resp. (M_ε^N)) revient donc à étudier l'épi-convergence de la suite de fonctionnelles

$$F_\varepsilon(v) = \int_{\Omega} |Dv|^2 \, dx + I_{\{v \in H_0^1(\Omega); v|_{\Sigma} = 0 \text{ sur } T_\varepsilon\}}(v)$$

$$\text{(resp. } G_\varepsilon(v) = \|v\|_V^2 + I_{\{v \in V; [v]_{\Sigma} = 0 \text{ sur } T_\varepsilon\}}(v))$$

dans $w - H_0^1(\Omega)$ (resp. $w - V$) ; I_K désigne la fonction indicatrice du convexe K .

THÉOREME 2.1 : *La suite de fonctionnelle F_ε (resp. G_ε) épi-converge vers F (resp. G) dans $w - H_0^1(\Omega)$ (resp. $w - V$) définie par*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad F(v) = \int_{\Omega} |Dv|^2 \, dx + aC \int_{\Sigma} v|_{\Sigma}^2 \, d\sigma$$

$$\left(\text{resp. } \forall v \in V, G(v) = \|v\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} [v]_{\Sigma}^2 \, d\sigma \right)$$

où $a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_\varepsilon^{N-2}}{\varepsilon^{N-1}} \in [0, +\infty]$ et où C est la capacité de T relativement à

$$\mathbb{R}^N, \text{ c'est-à-dire } C = \text{Inf} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |Dv|^2 \, dx ; v \in H^1(\mathbb{R}^N), v = 1 \text{ sur } T \right\}.$$

Remarque : Les fonctionnelles limites F et G prennent donc trois formes différentes selon que $a = 0$, $a \in]0, +\infty[$ ou $a = +\infty$, c'est-à-dire lorsque

$r_\varepsilon \ll \varepsilon^{N-1/N-2}$, $r_\varepsilon \sim k\varepsilon^{N-1/N-2}$ ou $r_\varepsilon \gg \varepsilon^{N-1/N-2}$; dans ce dernier cas, F et G s'écrivent

$$F(v) = \int_{\Omega} |Dv|^2 dx + I_{\{v \in H_0^1(\Omega); v|_{\Sigma} = 0 \text{ sur } \Sigma\}}(v)$$

$$G(v) = \|v\|_V^2 + I_{\{v \in V; [v]_{\Sigma} = 0 \text{ sur } \Sigma\}}(v).$$

Démonstration : Les démonstrations de l'épi-convergence de F_ε vers F et de G_ε vers G utilisent des arguments semblables. Nous donnons d'abord la démonstration de $(w - V) \lim_\varepsilon G_\varepsilon = G$, plus compliquée (résumée dans [14]), puis nous indiquons comment la modifier pour démontrer que $(w - H_0^1(\Omega)) \lim_\varepsilon F_\varepsilon = F$.

Démonstration de $G = \lim_\varepsilon G_\varepsilon$: Il s'agit de démontrer les deux assertions :

(i) $\forall v \in V \exists v_\varepsilon \in V : v_\varepsilon \rightharpoonup v$ dans $w - W$, $[v_\varepsilon]_{\Sigma} = 0$ sur T_ε et

$$\|v_\varepsilon\|_V^2 \rightarrow \|v\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} [v]_{\Sigma}^2 d\sigma$$

(ii) $v \in V, v_\varepsilon \in V, v_\varepsilon \rightharpoonup v$ dans $w - W$, $[v_\varepsilon]_{\Sigma} = 0$ sur T_ε

$$\Rightarrow \liminf \|v_\varepsilon\|_V^2 \geq \|v\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} [v]_{\Sigma}^2 d\sigma.$$

Démonstration de (i) : L'idée est de perturber v pour obtenir v_ε tel que $[v_\varepsilon]_{\Sigma} = 0$ sur T_ε , en faisant varier l'énergie de v au minimum. Pour cela, on introduit des fonctions tests w_ε définies sur chaque P_ε^j , pavé de \mathbb{R}^N , de côté ε , admettant Σ comme hyperplan de symétrie et tel que $T_\varepsilon^j \subset \Sigma \cap B_\varepsilon^j$, B_ε^j étant la boule inscrite dans P_ε^j ; w_ε est, dans chaque P_ε^j , le potentiel capacitair de T_ε^j dans B_ε^j .

LEMME 2.2 : Soit w_ε égale sur chaque boule B_ε^j à la solution de

$$\begin{cases} \Delta w_\varepsilon = 0 & \text{dans } B_\varepsilon^j \cap \Omega_i \quad (i = 1, 2) \\ w_\varepsilon = 1 & \text{sur } T_\varepsilon^j \\ w_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial B_\varepsilon^j \\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } (B_\varepsilon^j \cap \Sigma) \setminus T_\varepsilon^j. \end{cases}$$

et $w_\varepsilon = 0$ sur $\Omega \setminus \cup B_\varepsilon^j$. Alors $w_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |Dw_\varepsilon|^2 dx \rightarrow aC \text{ mes } \Sigma.$$

Lorsque $a \in [0, +\infty[$, $w_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $w - H_0^1(\Omega)$ et la mesure $|Dw_\varepsilon|^2 dx$ sur Ω converge étroitement vers la mesure $aC d\sigma$.

Démonstration du Lemme 2.2 : On a $w_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$ puisque

$$\int_{\Omega} w_\varepsilon^2 dx \leq \sum \text{mes } B_\varepsilon^j = \frac{\text{mes } \Sigma}{\varepsilon^{N-1}} K\varepsilon^N \rightarrow 0.$$

D'autre part, notant $B(\rho)$ la boule de rayon ρ et de centre 0, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Dw_\varepsilon|^2 dx &= \sum \int_{B_\varepsilon^j} |Dw_\varepsilon|^2 dx = \frac{\text{mes } \Sigma}{\varepsilon^{N-1}} \int_{B\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} |Dw_\varepsilon|^2 dx \\ &= \frac{\text{mes } \Sigma}{\varepsilon^{N-1}} \text{Min} \left\{ \int_{B\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} |Du|^2 dx ; u \in H_0^1\left(B\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right), u = 1 \text{ sur } T_\varepsilon \right\} \\ &= \frac{\text{mes } \Sigma}{\varepsilon^{N-1}} \text{Min} \left\{ \int_{B\left(\frac{\varepsilon}{2r_\varepsilon}\right)} |Du|^2 r_\varepsilon^{N-2} dy ; \right. \\ &\quad \left. u \in H_0^1\left(B\left(\frac{\varepsilon}{2r_\varepsilon}\right)\right) ; u = 1 \text{ sur } T_\varepsilon \right\} \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $x = r_\varepsilon y$. Par suite

$$\int_{\Omega} |Dw_\varepsilon|^2 dx \rightarrow aC \text{ mes } \Sigma.$$

Ainsi lorsque $a \in [0, +\infty[$, $|Dw_\varepsilon|^2 dx$ converge vaguement vers $aC d\sigma$ et il y a convergence étroite car convergence des masses. Le lemme est ainsi établi.

Maintenant, démontrons (i). Supposons que $a \in [0, +\infty[$.

Soit $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega}_2)$ et $v_\varepsilon = v - w_\varepsilon r$, où $r = (r_1, r_2) \in V$ est un relèvement régulier de $\frac{1}{2} [v]_\Sigma$ dans Ω_1 et de $-\frac{1}{2} [v]_\Sigma$ dans Ω_2 . On a $v_\varepsilon \rightarrow v$ dans $w - W$ car $w_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $w - H^1(\Omega)$, $[v_\varepsilon]_\Sigma = 0$ sur T_ε et

$$\int_{\Omega_i} |Dv_\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega_i} |Dv - rDw_\varepsilon - w_\varepsilon Dr|^2 dx$$

d'où

$$\begin{aligned} \lim \int_{\Omega_i} |Dv_\varepsilon|^2 dx &= \int_{\Omega_i} |Dv|^2 dx + \lim \int_{\Omega_i} r^2 |Dw_\varepsilon|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_i} |Dv|^2 dx + \frac{1}{2} aC \int_{\Sigma} r_i^2 d\sigma, \quad \text{d'après le Lemme 2.2} \\ &= \int_{\Omega_i} |Dv|^2 dx + \frac{1}{8} aC \int_{\Sigma} [v]_\Sigma^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Par suite

$$\|v_\varepsilon\|_V^2 \rightarrow \|v\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_\Sigma [v]_\Sigma^2 d\sigma.$$

Pour $v \in V$, on construit une suite v_ε en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega}_2)$ dans V et un argument diagonal.

Démonstration de (ii): Soient $v = (v_1, v_2)$, $v_\varepsilon = (v_\varepsilon^1, v_\varepsilon^2) \in V$ tels que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ dans $w - V$ et $[v_\varepsilon]_\Sigma = 0$ sur T_ε . Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega}_2)$ et $\varphi_\varepsilon = \varphi - w_\varepsilon r$, où $r = (r_1, r_2)$ est un relèvement régulier de $\frac{1}{2} [\varphi]_\Sigma$ dans Ω_1 et de $-\frac{1}{2} [\varphi]_\Sigma$ dans Ω_2 . Minorons $\|v_\varepsilon\|_V^2$ par

$$\|v_\varepsilon\|_V^2 \geq 2 \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (Dv_\varepsilon D\varphi_\varepsilon + v_\varepsilon \varphi_\varepsilon) dx - \|\varphi_\varepsilon\|_V^2.$$

D'une part,

$$\|\varphi_\varepsilon\|_V^2 \rightarrow \|\varphi\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_\Sigma [\varphi]_\Sigma^2 d\sigma, \text{ d'après (i).}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \liminf \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (Dv_\varepsilon D\varphi_\varepsilon + v_\varepsilon \varphi_\varepsilon) dx &\geq \\ &\geq \liminf \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} Dv_\varepsilon (D\varphi - w_\varepsilon Dr - rDw_\varepsilon) dx + \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} v\varphi dx \\ &\geq \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (Dv D\varphi + v\varphi) dx - \limsup \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(rv_\varepsilon) Dw_\varepsilon dx. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(rv_\varepsilon) Dw_\varepsilon dx &= \sum_{i=1}^2 \sum_j \int_{B_i^j \cap \Omega_i} D(rv_\varepsilon) Dw_\varepsilon dx \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_j \int_{\partial B_i^j \cap \Omega_i} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} rv_\varepsilon + \int_\Sigma \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu_1} r_1 v_\varepsilon^1 + \int_\Sigma \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu_2} r_2 v_\varepsilon^2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_j \int_{\partial B_i^j \cap \Omega_i} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} rv_\varepsilon, \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu_1} r_1 v_\varepsilon^1 + \int_\Sigma \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu_2} r_2 v_\varepsilon^2 &= \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu_1} (r_1 v_\varepsilon^1 + r_2 v_\varepsilon^2) = \\ &= \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu_1} \frac{1}{2} [\varphi]_\Sigma [v_\varepsilon]_\Sigma = 0 \end{aligned}$$

puisque $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial v_1} = \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial v_2} = 0$ sur $\Sigma \setminus T_\varepsilon$, $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial v_1} = \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial v_2}$ sur T_ε et $[v_\varepsilon]_\Sigma = 0$ sur T_ε . Pour obtenir la limite de $\sum_j \int_{\partial B_\varepsilon^j \cap \Omega_i} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial v} r_{v_\varepsilon}$, appliquons le Lemme suivant (cf. [2]) :

LEMME 2.3 : La mesure $\sum_j \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial v} \delta_{\partial B_\varepsilon^j}$ converge vers $-aC \, d\sigma$ fortement dans $H_{\text{loc}}^{-1}(\mathbb{R}^N)$.

Il en résulte que, puisque $r_{v_\varepsilon} \rightharpoonup r_v$ dans $w - V$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_j \int_{\partial B_\varepsilon^j \cap \Omega_i} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial v} r_{v_\varepsilon} &\rightarrow -\frac{1}{2} aC \int_\Sigma (r_1 v_1 + r_2 v_2) \, d\sigma \\ &= -\frac{1}{4} aC \int_\Sigma [\varphi]_\Sigma [v]_\Sigma \, d\sigma. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \liminf \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (Dv_\varepsilon D\varphi + v_\varepsilon \varphi) \, dx &\geq \\ &\geq \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (Dv D\varphi + v\varphi) \, dx + \frac{1}{4} aC \int_\Sigma [\varphi]_\Sigma [v]_\Sigma \, d\sigma. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \liminf \|v_\varepsilon\|_V^2 &\geq 2 \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (Dv D\varphi + v\varphi) \, dx + \frac{1}{2} aC \int_\Sigma [\varphi]_\Sigma [v]_\Sigma \, d\sigma - \\ &\quad - \| \varphi \|_V^2 - \frac{1}{4} aC \int_\Sigma [\varphi]_\Sigma^2 \, d\sigma. \end{aligned}$$

En faisant tendre φ vers v dans V fortement, on obtient

$$\liminf \|v_\varepsilon\|_V^2 \geq \|v\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_\Sigma [v]_\Sigma^2 \, d\sigma.$$

Étudions maintenant le cas $a = +\infty$, c'est-à-dire que r_ε est tel que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_\varepsilon^{N-2}}{\varepsilon^{N-1}} = +\infty$. Soit $r_\varepsilon^c = \varepsilon^{\frac{N-1}{N-2}}$. Quel que soit $k \in \mathbb{R}_+$, on a $r_\varepsilon \geq kr_\varepsilon^c$.

Notons $T(r_\varepsilon)$ la réunion des perforations homothétiques de T de rapport r_ε . On a $T(r_\varepsilon) \supset T(kr_\varepsilon^c)$, d'où

$$I \{ [v]_\Sigma = 0 \text{ sur } T(r_\varepsilon) \} \geq I \{ [v]_\Sigma = 0 \text{ sur } T(kr_\varepsilon^c) \}$$

donc

$$\begin{aligned} \liminf_e [\|v\|_V^2 + I_{\{[v]_{\Sigma} = 0 \text{ sur } T(r_\epsilon)\}}] &\cong \lim_e [\|v\|_V^2 + I_{\{[v]_{\Sigma} = 0 \text{ sur } T(kr_\epsilon^2)\}}] = \\ &= \|v\|_V^2 + \frac{1}{4} k^{N-2} C \int_{\Sigma} [v]_{\Sigma}^2 d\sigma \end{aligned}$$

et ceci quel que soit $k \in \mathbb{R}^+$.

On en déduit que, quel que soit $v \in V$

$$\lim_e [\|v\|_V^2 + I_{\{[v]_{\Sigma} = 0 \text{ sur } T(r_\epsilon)\}}] = \begin{cases} +\infty, & \text{si } [v] \neq 0 \text{ sur } \Sigma \\ \|v\|_V^2, & \text{si } [v]_{\Sigma} = 0 \text{ sur } \Sigma; \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\lim_e [\|v\|_V^2 + I_{\{[v]_{\Sigma} = 0 \text{ sur } T(r_\epsilon)\}}] = \|v\|_V^2 + I_{\{[v]_{\Sigma} = 0 \text{ sur } \Sigma\}}.$$

Démonstration de $F = (w - H_0^1(\Omega)) \lim_e F_\epsilon$: Il s'agit de montrer que :

(i) $\forall v \in H_0^1(\Omega) \exists v_\epsilon \in H_0^1(\Omega) : v_\epsilon \rightharpoonup v$ dans $w - H_0^1(\Omega)$, $v_\epsilon|_{\Sigma} = 0$ sur T_ϵ et

$$\int_{\Omega} |Dv_\epsilon|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} |Dv|^2 dx + aC \int_{\Sigma} v|_{\Sigma}^2 d\sigma.$$

(ii) $v \in H_0^1(\Omega)$, $v_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$, $v_\epsilon \rightharpoonup v$ dans $w - H_0^1(\Omega)$, $v_\epsilon|_{\Sigma} = 0$ sur T_ϵ

$$\Rightarrow \liminf \int_{\Omega} |Dv_\epsilon|^2 dx \cong \int_{\Omega} |Dv|^2 dx + aC \int_{\Sigma} v|_{\Sigma}^2 d\sigma.$$

Pour établir ces deux assertions, il suffit d'adapter et de reprendre les démonstrations précédentes : (i) est obtenue en considérant $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $v_\epsilon = v - w_\epsilon v$; pour obtenir (ii), on introduit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi_\epsilon = \varphi - w_\epsilon \varphi$ et on minore $\int_{\Omega} |Dv_\epsilon|^2 dx$ en utilisant le Lemme 2.3. \square

COROLLAIRE 2.4 : Soit $f \in L^2(\Omega)$. La solution u_ϵ de (M_ϵ^D) (resp. (M_ϵ^N)) converge dans $w - H_0^1(\Omega)$ (resp. $w - V$) vers la solution u de

$$(M^D) \quad \text{Min} \left\{ \int_{\Omega} |Dv|^2 dx - 2 \int_{\Omega} fv dx + aC \int_{\Sigma} v|_{\Sigma}^2 d\sigma ; v \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

$$\text{resp. } (M^N) \quad \text{Min} \left\{ \|v\|_V^2 - 2 \int_{\Omega} fv dx + \frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} [v]_{\Sigma}^2 d\sigma ; v \in V \right\}$$

et il y a convergence des minima.

Si $a = 0$ ou si $a = +\infty$, alors $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $s - H_0^1(\Omega)$ (resp. $s - V$). Si $a \in]0, +\infty[$, alors $u_\varepsilon - u - w_\varepsilon u \rightarrow 0$ dans $s - W^{1,1}(\Omega)$ et dans $s - H^1(\Omega)$ si $u \in C_0^1(\Omega)$ (resp., notant r^u un relèvement de $\frac{1}{2} [u]_\Sigma$ dans Ω_1 et de $-\frac{1}{2} [u]_\Sigma$ dans Ω_2 , $u_\varepsilon - u - w_\varepsilon r^u \rightarrow 0$ dans $s - W^{1,1}(\Omega_1) \times W^{1,1}(\Omega_2)$ et dans $s - V$ si $u \in C^1(\bar{\Omega}_1) \times C^1(\bar{\Omega}_2)$).

COROLLAIRE 2.5 : La limite u de la solution u_ε de (D_ε) est la solution de

$$\begin{aligned}
 1) & \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. , & \text{si } \lim \frac{r_\varepsilon^{N-2}}{\varepsilon^{N-1}} = 0 . \\
 2) & \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega_i \\ u \in H_0^1(\Omega_i) \end{array} \right. \quad (i = 1, 2) , & \text{si } \lim \frac{r_\varepsilon^{N-2}}{\varepsilon^{N-1}} = +\infty . \\
 3) & \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega_i \quad (i = 1, 2) \\ aCu|_\Sigma = - \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_\Sigma \text{ sur } \Sigma \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. , & \text{si } \lim \frac{r_\varepsilon^{N-2}}{\varepsilon^{N-1}} = a \in]0, +\infty[.
 \end{aligned}$$

La limite u de la solution u_ε de (N_ε) est la solution de

$$\begin{aligned}
 1) & \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega_i \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \end{array} \right. \quad (i = 1, 2) , & \text{si } \lim \frac{r_\varepsilon^{N-2}}{\varepsilon^{N-1}} = 0 . \\
 2) & \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. , & \text{si } \lim \frac{r_\varepsilon^{N-2}}{\varepsilon^{N-1}} = +\infty . \\
 3) & \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega_i \quad (i = 1, 2) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_1} = -\frac{\partial u}{\partial \nu_2} = -\frac{1}{4} aC [u]_\Sigma, \text{ sur } \Sigma , \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. , & \text{si } \lim \frac{r_\varepsilon^{N-2}}{\varepsilon^{N-1}} = a \in]0, +\infty[.
 \end{aligned}$$

Démonstrations : Le Corollaire 2.5 se déduit du Corollaire 2.4 en écrivant les équations d'Euler associées à (M^D) et (M^N) .

Démontrons le Corollaire 2.4. D'abord la convergence de (M_ε^D) vers

(M^D) et de (M_ε^N) vers (M^N) résultent du Théorème 2.1 et des propriétés de l'épi-convergence (cf. [1] par exemple).

Supposons que u_ε est solution de (M_ε^N). Si $a = 0$ ou si $a = +\infty$, on a

$$\|u_\varepsilon\|_V^2 - 2 \int_\Omega f u_\varepsilon dx \rightarrow \|u\|_V^2 - 2 \int_\Omega f u dx$$

donc, puisque $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $w - V$, on en déduit que $\|u_\varepsilon\|_V^2 \rightarrow \|u\|_V^2$ et ainsi $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $s - V$.

Si $a \in]0, +\infty[$, montrons que $u_\varepsilon - u - w_\varepsilon r^\mu \rightarrow 0$ dans

$$s - W^{1,1}(\Omega_1) \times W^{1,1}(\Omega_2).$$

On a

$$\|u_\varepsilon\|_V^2 \rightarrow \|u\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_\Sigma [u]_\Sigma^2 d\sigma.$$

Soit $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}_1) \times C^1(\bar{\Omega}_2)$ et $r^\varphi \in C^1(\bar{\Omega}_1) \times C^1(\bar{\Omega}_2)$ un relèvement de $\frac{1}{2} [\varphi]_\Sigma$ dans Ω_1 et de $-\frac{1}{2} [\varphi]_\Sigma$ dans Ω_2 . Montrons d'abord que

$$\|u_\varepsilon - \varphi + w_\varepsilon r^\varphi\|_V^2 \rightarrow \|u - \varphi\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_\Sigma [u - \varphi]_\Sigma^2 d\sigma.$$

En effet

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - \varphi + w_\varepsilon r^\varphi\|_V^2 &= \|u_\varepsilon\|_V^2 + \|\varphi - w_\varepsilon r^\varphi\|_V^2 - \\ &\quad - 2 \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (Du_\varepsilon D(\varphi - w_\varepsilon r^\varphi) + u_\varepsilon(\varphi - w_\varepsilon r^\varphi)) dx. \end{aligned}$$

Or, d'une part $\|\varphi - w_\varepsilon r^\varphi\|_V^2 \rightarrow \|\varphi\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_\Sigma [\varphi]_\Sigma^2 d\sigma$ (cf. la démonstration du Théorème 2.1, démonstration de (i)) et d'autre part

$$\begin{aligned} \lim \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (Du_\varepsilon D(\varphi - w_\varepsilon r^\varphi) + u_\varepsilon(\varphi - w_\varepsilon r^\varphi)) dx &= \\ &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (DuD\varphi + u\varphi) dx - \lim \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(u_\varepsilon r^\varphi) Dw_\varepsilon dx \\ &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (DuD\varphi + u\varphi) dx + \frac{1}{4} aC \int_\Sigma [u]_\Sigma [\varphi]_\Sigma d\sigma \end{aligned}$$

cette limite ayant été déterminée dans la démonstration du Théorème 2.1, démonstration de (ii). Donc

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - \varphi + w_\varepsilon r^\varphi\|_V^2 &\rightarrow \|u\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_\Sigma [u]_\Sigma^2 d\sigma + \|\varphi\|_V^2 + \\ &+ \frac{1}{4} aC \int_\Sigma [\varphi]_\Sigma^2 d\sigma - 2 \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (DuD\varphi + u\varphi) dx - \frac{1}{2} aC \int_\Sigma [u]_\Sigma [\varphi]_\Sigma d\sigma = \\ &= \|u - \varphi\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_\Sigma [u - \varphi]_\Sigma^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Si $u \in C^1(\bar{\Omega}_1) \times C^1(\bar{\Omega}_2)$, en prenant $\varphi = u$ dans ce qui précède, on obtient que $\|u_\varepsilon - u + w_\varepsilon r^u\|_V^2 \rightarrow 0$.

Pour $u \in V$, montrons que $\|u_\varepsilon - u + w_\varepsilon r^u\|_{W^{11}(\Omega_1) \times W^{11}(\Omega_2)} \rightarrow 0$.

Soit $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}_1) \times C^1(\bar{\Omega}_2)$. On a

$$\|u_\varepsilon - u + w_\varepsilon r^u\|_{W^{11}} \leq \|u_\varepsilon - \varphi + w_\varepsilon r^\varphi\|_{W^{11}} + \|\varphi - u\|_{W^{11}} + \|w_\varepsilon(r^\varphi - r^u)\|_{W^{11}}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lim \|u_\varepsilon - u + w_\varepsilon r^u\|_{W^{11}} &\leq K \left(\|u - \varphi\|_V^2 + \int_\Sigma [u - \varphi]_\Sigma^2 d\sigma \right)^{1/2} + \\ &+ \lim \|w_\varepsilon(r^\varphi - r^u)\|_{W^{11}} \\ &\leq K \left(\|u - \varphi\|_V^2 + \int_\Sigma [u - \varphi]_\Sigma^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &+ K' \|r^\varphi - r^u\|_V. \end{aligned}$$

Faisant tendre φ vers u dans $s - V$, on obtient

$$u_\varepsilon - u + w_\varepsilon r^u \rightarrow 0 \quad \text{dans } s - W^{11}(\Omega_1) \times W^{11}(\Omega_2).$$

Supposons que u_ε est solution de (M_ε^D) . Si $a = 0$ ou si $a = +\infty$, on obtient comme précédemment que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $s - H_0^1(\Omega)$. Si $a \in]0, +\infty[$, montrons que $u_\varepsilon - u - w_\varepsilon u \rightarrow 0$ dans $s - W^{1,1}(\Omega)$. On a

$$\int_\Omega |Du_\varepsilon|^2 dx \rightarrow \int_\Omega |Du|^2 dx + aC \int_\Sigma |u|_\Sigma^2 d\sigma.$$

Soit $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. On montre que

$$\int_\Omega |D(u_\varepsilon - \varphi + w_\varepsilon \varphi)|^2 dx \rightarrow \int_\Omega |D(u - \varphi)|^2 dx + aC \int_\Sigma (u - \varphi)^2 d\sigma.$$

Lorsque $u \in C_0^1(\Omega)$, on en déduit en prenant $\varphi = u$ que $u_\varepsilon - u + w_\varepsilon u \rightarrow 0$ dans $s - H^1(\Omega)$. Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on écrit

$$\|u_\varepsilon - u + w_\varepsilon u\|_{W^{1,1}} \leq \|u_\varepsilon - \varphi + w_\varepsilon \varphi\|_{W^{1,1}} + \|\varphi - u\|_{W^{1,1}} + \|w_\varepsilon(\varphi - u)\|_{W^{1,1}}$$

et on en déduit que $u_\varepsilon - u + w_\varepsilon u \rightarrow 0$ dans $s - W^{1,1}(\Omega)$. \square

2.2 Convergence de problèmes variationnels unilatéraux associés

Lorsque la contrainte bilatérale $v|_\Sigma = 0$ ou $[v]_\Sigma = 0$ sur T_ε des problèmes (M_ε^D) et (M_ε^N) est remplacée par la contrainte unilatérale $v|_\Sigma \geq 0$ ou $[v]_\Sigma \geq 0$ sur T_ε , on détermine par des démonstrations semblables les problèmes limites de ces problèmes unilatéraux; la contrainte limite obtenue dépend alors de $v|_{\bar{\Sigma}}$ ou de $[v]_{\bar{\Sigma}}$ (on note $v^- = \sup(-v, 0) =$ partie négative de v).

THÉORÈME 2.6: *On considère les quatre problèmes de minimisation suivants :*

$$\begin{aligned} (M_\varepsilon^1) \quad & \text{Min} \left\{ \int_{\Omega} |Dv|^2 - 2 \int_{\Omega} fv \, dx ; v \in H_0^1(\Omega), v|_{\Sigma} \geq 0 \text{ sur } T_\varepsilon \right\} \\ (M_\varepsilon^2) \quad & \text{Min} \left\{ \|v\|_V^2 - 2 \int_{\Omega} fv \, dx ; v \in V, [v]_{\Sigma} \geq 0 \text{ sur } T_\varepsilon \right\} \\ (M_\varepsilon^3) \quad & \text{Min} \left\{ \|v\|_V^2 - 2 \int_{\Omega} fv \, dx ; v \in V, [v]_{\Sigma} = 0 \text{ et } v|_{\Sigma} \geq 0 \text{ sur } T_\varepsilon \right\} \\ (M_\varepsilon^4) \quad & \text{Min} \left\{ \|v\|_V^2 - 2 \int_{\Omega} fv \, dx ; v \in V, \right. \\ & \left. [v]_{\Sigma} \geq 0 \text{ et } v_1|_{\Sigma} + v_2|_{\Sigma} \geq 0 \text{ sur } T_\varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

La solution u_ε de (M_ε^1) , (M_ε^2) , (M_ε^3) ou (M_ε^4) converge faiblement vers la solution u des problèmes respectifs (M^1) , (M^2) , (M^3) ou (M^4) suivants :

$$\begin{aligned} (M^1) \quad & \text{Min} \left\{ \int_{\Omega} |Dv|^2 - 2 \int_{\Omega} fv \, dx + aC \int_{\Sigma} (v|_{\bar{\Sigma}})^2 \, d\sigma ; v \in H_0^1(\Omega) \right\} \\ (M^2) \quad & \text{Min} \left\{ \|v\|_V^2 - 2 \int_{\Omega} fv \, dx + \frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} ([v]_{\bar{\Sigma}})^2 \, d\sigma ; v \in V \right\} \\ (M^3) \quad & \text{Min} \left\{ \|v\|_V^2 - 2 \int_{\Omega} fv \, dx + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} ([v]_{\bar{\Sigma}}^2 + ((v_1|_{\Sigma} + v_2|_{\Sigma})^-)^2) \, d\sigma ; v \in V \right\} \end{aligned}$$

$$(M^4) \quad \text{Min} \left\{ \|v\|_V^2 - 2 \int_{\Omega} f v \, dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} a C \int_{\Sigma} ([v]_{\Sigma}^2 + (v_1|_{\Sigma} + v_2|_{\Sigma})^{-2}) \, d\sigma ; v \in V \right\}$$

et il y a convergence des minima.

* Si $a = 0$, alors $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ dans $s - H_0^1(\Omega)$ pour le cas 1 et $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ dans $s - V$ pour les cas 2, 3 et 4.

* Si $a = +\infty$, alors

— cas 1 : $u|_{\Sigma} \cong 0$ sur Σ et $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ dans $s - H_0^1(\Omega)$.

— cas 2 : $[u]_{\Sigma} \cong 0$ sur Σ et $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ dans $s - V$.

— cas 3 : $[u]_{\Sigma} = 0$ et $u|_{\Sigma} \cong 0$ sur Σ et $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ dans $s - V$.

— cas 4 : $[u]_{\Sigma} \cong 0$ et $u_1|_{\Sigma} + u_2|_{\Sigma} \cong 0$ sur Σ et $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ dans $s - V$.

* Si $a \in]0, +\infty[$, alors :

— cas 1 : $u_{\varepsilon} - u - w_{\varepsilon} u^{-} \rightarrow 0$ dans $s - W^{1,1}(\Omega)$ et dans $s - H_0^1(\Omega)$ si $u \in C_0^1(\Omega)$.

— cas 2 : $u_{\varepsilon} - u - w_{\varepsilon} r^u \rightarrow 0$ dans $s - W^{1,1}(\Omega_1) \times W^{1,1}(\Omega_2)$ où $r^u \in V$ et est un relèvement de $\frac{1}{2} [u]_{\Sigma}$ dans Ω_1 et de $-\frac{1}{2} [u]_{\Sigma}$ dans Ω_2 ; il y a convergence dans $s - V$ si $u \in C^1(\bar{\Omega}_1) \times C^1(\bar{\Omega}_2)$.

— cas 3 : $u_{\varepsilon} - u + w_{\varepsilon} \tilde{r}^u \rightarrow 0$ dans $s - W^{1,1}(\Omega_1) \times W^{1,1}(\Omega_2)$ où $\tilde{r}^u \in V$ et est un relèvement de

$$\frac{1}{2} [u]_{\Sigma} - \frac{1}{2} (u_1|_{\Sigma} + u_2|_{\Sigma})^{-} \quad \text{dans } \Omega_1 \\ - \frac{1}{2} [u]_{\Sigma} - \frac{1}{2} (u_1|_{\Sigma} + u_2|_{\Sigma})^{-} \quad \text{dans } \Omega_2 ;$$

il y a convergence dans $s - V$ si $u \in C^1(\bar{\Omega}_1) \times C^1(\bar{\Omega}_2)$;

— cas 4 : $u_{\varepsilon} - u - w_{\varepsilon} \tilde{r}^u \rightarrow 0$ dans $s - W^{1,1}(\Omega_1) \times W^{1,1}(\Omega_2)$ où $\tilde{r}^u \in V$ et est un relèvement de

$$\frac{1}{2} [u]_{\Sigma} + \frac{1}{2} (u_1|_{\Sigma} + u_2|_{\Sigma})^{-} \quad \text{dans } \Omega_1 \\ - \frac{1}{2} [u]_{\Sigma} + \frac{1}{2} (u_1|_{\Sigma} + u_2|_{\Sigma})^{-} \quad \text{dans } \Omega_2 ;$$

il y a convergence dans $s - V$ si $u \in C^1(\bar{\Omega}_1) \times C^2(\bar{\Omega}_2)$.

Démonstration.

1) *Convergence des problèmes de minimisation.* La convergence de

(M_ε^i) vers (M^i) ($i = 1, 2, 3, 4$) résultera de l'épi-convergence des fonctionnelles

$$\begin{aligned} F_\varepsilon^1(v) &= \int_{\Omega} |Dv|^2 + I_{\{v \in H_0^1(\Omega); v|_{\Sigma} \geq 0 \text{ sur } T_\varepsilon\}}(v) \\ F_\varepsilon^2(v) &= \|v\|_V^2 + I_{\{v \in V; [v]_{\Sigma} \geq 0 \text{ sur } T_\varepsilon\}}(v) \\ F_\varepsilon^3(v) &= \|v\|_V^2 + I_{\{v \in V; [v]_{\Sigma} = 0 \text{ et } v|_{\Sigma} \geq 0 \text{ sur } T_\varepsilon\}}(v) \\ F_\varepsilon^4(v) &= \|v\|_V^2 + I_{\{v \in V; [v]_{\Sigma} \geq 0 \text{ et } v_1|_{\Sigma} + v_2|_{\Sigma} \geq 0 \text{ sur } T_\varepsilon\}}(v) \end{aligned}$$

respectivement vers

$$\begin{aligned} F^1(v) &= \int_{\Omega} |Dv|^2 + aC \int_{\Sigma} (v|_{\Sigma})^2 d\sigma \\ F^2(v) &= \|v\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} ([v]_{\Sigma})^2 d\sigma \\ F^3(v) &= \|v\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} \{([v]_{\Sigma}^2 + (v_1|_{\Sigma} + v_2|_{\Sigma})^-)^2\} d\sigma \\ F^4(v) &= \|v\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} \{[v]_{\Sigma}^2 + (v_1|_{\Sigma} + v_2|_{\Sigma})^{-2}\} d\sigma \end{aligned}$$

dans $w - H_0^1$ pour le cas 1 et dans $w - W$ pour les cas 2, 3 et 4.

Pour établir ces quatre épi-convergences, la méthode de démonstration est analogue à celle du théorème 2.1 ; la seule difficulté est de trouver, dans chaque cas i , une suite v_ε telle que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$, v_ε satisfasse la contrainte et $F_\varepsilon^i(v_\varepsilon) \rightarrow F^i(v)$. Ces suites sont les suivantes :

- cas 1 : $v_\varepsilon = v + w_\varepsilon v^-$, avec $v \in \mathcal{D}(\Omega)$
- cas 2 : $v_\varepsilon = v + w_\varepsilon r^v$, avec $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega}_2)$
- cas 3 : $v_\varepsilon = v - w_\varepsilon \tilde{r}^v$, avec $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega}_2)$
- cas 4 : $v_\varepsilon = v + w_\varepsilon \tilde{r}^v$, avec $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega}_2)$.

Détaillons la démonstration du cas 3, puis nous indiquerons comment la modifier pour définir les autres cas (les cas 1 et 2 sont d'ailleurs démontrés dans [15]).

Démonstration de $F^3 = (w - V) \lim_\varepsilon F_\varepsilon^3$

i) Soit $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega}_2)$ et $v_\varepsilon = v - w_\varepsilon \tilde{r}^v$ définie ci-dessus (cas 3). Alors $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ dans $w - V$ car $w_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $w - H^1(\Omega)$ et sur T_ε ,

$$[v_\varepsilon]_{\Sigma} = 0 \quad \text{et} \quad v_\varepsilon^1|_{\Sigma} = v_\varepsilon^2|_{\Sigma} = \frac{1}{2} (v_1|_{\Sigma} + v_2|_{\Sigma})^+ \geq 0.$$

(Écrivons v_i et $[v]$ à la place de $v_i|_{\Sigma}$ et $[v]_{\Sigma}$ au cours des démonstrations.)

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} |Dv_{\varepsilon}|^2 dx &= \int_{\Omega_i} |Dv - \tilde{r}^v Dw_{\varepsilon} - w_{\varepsilon} D\tilde{r}^v|^2 dx \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{\Omega_i} |Dv|^2 + \lim \int_{\Omega_i} (\tilde{r}^v)^2 |Dw_{\varepsilon}|^2 dx . \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 2.2,

$$\lim \int_{\Omega_1} (\tilde{r}^v)^2 |Dw_{\varepsilon}|^2 dx = \frac{1}{2} aC \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} [v] - \frac{1}{2} (v_1 + v_2)^- \right)^2 d\sigma ,$$

$$\lim \int_{\Omega_2} (\tilde{r}^v)^2 |Dw_{\varepsilon}|^2 dx = \frac{1}{2} aC \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2} [v] + \frac{1}{2} (v_1 + v_2)^- \right)^2 d\sigma .$$

Donc

$$\lim \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} |Dv_{\varepsilon}|^2 dx = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} |Dv|^2 + \frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} ([v]^2 + ((v_1 + v_2)^-)^2) d\sigma$$

et par suite

$$\lim \|v_{\varepsilon}\|_V^2 = \|v\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} ([v]^2 + ((v_1 + v_2)^-)^2) d\sigma .$$

ii) Soit $v \in V$ et $v_{\varepsilon} \in V$ tel que $v_{\varepsilon} \rightharpoonup v$ dans $w - V$, $[v_{\varepsilon}] = 0$ sur T_{ε} et $v_{\varepsilon} \geq 0$ sur T_{ε} . Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega}_2)$ et $\varphi_{\varepsilon} = \varphi - w_{\varepsilon} \tilde{r}^{\varphi}$. On a

$$\|v_{\varepsilon}\|_V^2 \geq 2 \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (Dv_{\varepsilon} D\varphi_{\varepsilon} + v_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon}) dx - \|\varphi_{\varepsilon}\|_V^2 .$$

D'une part $\|\varphi_{\varepsilon}\|_V^2 \rightarrow \|\varphi\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} ([\varphi]^2 + ((\varphi_1 + \varphi_2)^-)^2) d\sigma$ d'après i).

D'autre part

$$\begin{aligned} \liminf \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (Dv_{\varepsilon} D\varphi_{\varepsilon} + v_{\varepsilon} \varphi_{\varepsilon}) dx &\geq \\ &\geq \liminf \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} Dv_{\varepsilon} (D\varphi - w_{\varepsilon} D\tilde{r}^{\varphi} - \tilde{r}^{\varphi} Dw_{\varepsilon}) dx + \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} v\varphi dx \\ &\geq \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (DvD\varphi + v\varphi) dx + \liminf \left(- \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(v_{\varepsilon} \tilde{r}^{\varphi}) Dw_{\varepsilon} dx \right) \end{aligned}$$

Mais, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(v_\varepsilon \tilde{r}^\varphi) Dw_\varepsilon dx &= - \sum_{i=1}^2 \sum_j \int_{B_\varepsilon^i \cap \Omega_i} D(v_\varepsilon \tilde{r}^\varphi) Dw_\varepsilon dx = \\ &= - \sum_{i=1}^2 \sum_j \int_{\partial B_\varepsilon^i \cap \Omega_i} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} v_\varepsilon \tilde{r}^\varphi - \int_\Sigma \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} (v_\varepsilon^1 \tilde{r}_1^\varphi + v_\varepsilon^2 \tilde{r}_2^\varphi) d\sigma . \end{aligned}$$

Or d'après le lemme 2.3, puisque $v_\varepsilon^i \tilde{r}_i^\varphi \rightarrow v_i \tilde{r}_i^\varphi$ dans $w - H^1(\Omega_i)$,

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^2 \sum_j \int_{\partial B_\varepsilon^i \cap \Omega_i} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} v_\varepsilon \tilde{r}^\varphi &\rightarrow \frac{1}{2} aC \int_\Sigma (v_1 \tilde{r}_1^\varphi + v_2 \tilde{r}_2^\varphi) d\sigma = \\ &= \frac{1}{4} aC \int_\Sigma ([v][\varphi] - (v_1 + v_2)(\varphi_1 + \varphi_2)^-) d\sigma \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} - \int_\Sigma \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} (v_\varepsilon^1 \tilde{r}_1^\varphi + v_\varepsilon^2 \tilde{r}_2^\varphi) d\sigma &= \\ &= - \frac{1}{2} \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} ([v_\varepsilon][\varphi] - (v_\varepsilon^1 + v_\varepsilon^2)(\varphi_1 + \varphi_2)^-) d\sigma \cong 0 , \end{aligned}$$

car sur T_ε , $[v_\varepsilon] = 0$ et $v_\varepsilon^1 + v_\varepsilon^2 \cong 0$.

Donc

$$\begin{aligned} \liminf \left(- \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(v_\varepsilon \tilde{r}^\varphi) Dw_\varepsilon dx \right) &\cong \\ &\cong \frac{1}{4} aC \int_\Sigma ([v][\varphi] - (v_1 + v_2)(\varphi_1 + \varphi_2)^-) d\sigma \end{aligned}$$

et, par suite

$$\begin{aligned} \liminf \|v_\varepsilon\|_V^2 &\cong 2 \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (DvD\varphi + v\varphi) + \\ &+ \frac{1}{2} aC \int_\Sigma ([v][\varphi] - (v_1 + v_2)(\varphi_1 + \varphi_2)^-) d\sigma - \\ &- \|\varphi\|_V^2 - \frac{1}{4} aC \int_\Sigma ([\varphi]^2 + ((\varphi_1 + \varphi_2)^-)^2) d\sigma . \end{aligned}$$

Lorsque $\varphi \rightarrow v$ dans $s - V$, on obtient

$$\liminf \|v_\varepsilon\|_V^2 \cong \|v\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_\Sigma ([v]^2 + ((v_1 + v_2)^-)^2) d\sigma .$$

Démonstration de $F^4 = (w - V) \lim_e F_\varepsilon^4$. Il suffit de réécrire ce qui précède avec $v_\varepsilon = v + w_\varepsilon \tilde{r}^v$ et $\varphi_\varepsilon = \varphi + w_\varepsilon \tilde{r}^\varphi$ et de montrer que

$$\begin{aligned} \liminf \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(v_\varepsilon \tilde{r}^\varphi) Dw_\varepsilon dx &\cong \\ &\cong -\frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} ([v][\varphi]^- + (v_1 + v_2)(\varphi_1 + \varphi_2)^-) d\sigma. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \liminf \|v_\varepsilon\|_V^2 &\cong 2 \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (DvD\varphi + v\varphi) - \\ &\quad - \frac{1}{2} aC \int_{\Sigma} ([v][\varphi]^- + (v_1 + v_2)(\varphi_1 + \varphi_2)^-) d\sigma - \\ &\quad - \| \varphi \|_V^2 - \frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} (([\varphi]^-)^2 + ((\varphi_1 + \varphi_2)^-)^2) d\sigma \end{aligned}$$

d'où le résultat en faisant $\varphi \rightarrow v$ dans $s - V$.

Démonstration de $F^1 = (w - H_0^1) \lim_e F_\varepsilon^1$ et de $F^2 = (w - V) \lim_e F_\varepsilon^2$. Le point essentiel est d'établir pour ces cas respectifs :

$$\begin{aligned} \liminf \int_{\Omega} D(v_\varepsilon \varphi^-) Dw_\varepsilon dx &\cong -aC \int_{\Sigma} v\varphi^- d\sigma \\ \liminf \int_{\Omega} D(v_\varepsilon r^\varphi) Dw_\varepsilon dx &\cong -\frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} [v][\varphi]^- d\sigma. \end{aligned}$$

2) *Correcteurs* : La méthode de démonstration est analogue à celle du Corollaire 2.4. Il s'agit d'établir d'abord les relations :

— Cas 1 :

$$\begin{aligned} \limsup \int_{\Omega} |D(u_\varepsilon - \varphi - w_\varepsilon \varphi^-)|^2 &\cong \\ &\cong \int_{\Omega} |D(u - \varphi)|^2 + aC \int_{\Sigma} ((u^- - \varphi^-)^2 + 2u^+ \varphi^-) d\sigma. \end{aligned}$$

— Cas 2 :

$$\begin{aligned} \limsup \|u_\varepsilon - \varphi - w_\varepsilon r^\varphi\|_V^2 &\cong \\ &\cong \|u - \varphi\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_{\Sigma} (([u]^- - [\varphi]^-)^2 + 2[u]^+ [\varphi]^-) d\sigma. \end{aligned}$$

— Cas 3 :

$$\begin{aligned} \limsup \|u_\varepsilon - \varphi + w_\varepsilon \tilde{r}^\varphi\|_V^2 &\cong \\ &\cong \|u - \varphi\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_\Sigma (([u] - [\varphi])^2 + ((u_1 + u_2)^- - (\varphi_1 + \varphi_2)^-)^2 \\ &\quad + 2(u_1 + u_2)^+ (\varphi_1 + \varphi_2)^-) d\sigma . \end{aligned}$$

— Cas 4 :

$$\begin{aligned} \limsup \|u_\varepsilon - \varphi - w_\varepsilon \tilde{r}^\varphi\|_V^2 &\cong \\ &\cong \|u - \varphi\|_V^2 + \frac{1}{4} aC \int_\Sigma (([u]^- - [\varphi]^-)^2 + ((u_1 + u_2)^- - (\varphi_1 + \varphi_2)^-)^2 \\ &\quad + 2[u]^+ [\varphi]^- + (u_1 + u_2)^+ (\varphi_1 + \varphi_2)^-) d\sigma . \end{aligned}$$

Puis on en déduit les convergences.

2.3. Remarques

Les résultats de convergence ainsi obtenus (Corollaire 2.4 et Théorème 2.6, cas 1 et 2) s'inscrivent dans un cadre beaucoup plus général que celui de la grille plane périodique. Lorsque T_ε est une partie d'une variété Σ de codimension un, il s'agit de démontrer l'épi-convergence des fonctionnelles $F_\varepsilon, G_\varepsilon, F_\varepsilon^1, F_\varepsilon^2$. Ce type de résultat est difficile à obtenir et les démonstrations utilisent des techniques analogues à celles de [8, 6, 3, 1]. Nous renvoyons à [4] pour cette étude.

3. RAPIDITÉ DE CONVERGENCE DES SOLUTIONS DE (D_ε) ET (N_ε) LORSQUE LES TROUS DE LA GRILLE ONT UN DIAMÈTRE DE L'ORDRE DE LA PÉRIODE

Dans ce paragraphe, on suppose que $r_\varepsilon = k\varepsilon$, avec $0 < k < 1$ et que T est inclus dans le pavé unité Y de \mathbb{R}^{N-1} .

3.1. Résultats

Avant d'énoncer les résultats, introduisons la fonction w qui permettra de définir les fonctions tests w_ε utilisées ultérieurement.

LEMME 3.1 : Soit $A = Y \times]0, +\infty[$ et $A(R) = Y \times]0, R[$, où $R > 0$. Il existe w unique tel que $w \in L^2(A(R))$ pour tout $R > 0$, $\frac{\partial w}{\partial x_i} \in L^2(A)$ pour

$$1 \leq i \leq N,$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{sur } A \\ w = 0 & \text{sur } T \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 1 & \text{sur } Y \setminus T \end{cases}$$

w (resp. $\frac{\partial w}{\partial \nu}$) prend les mêmes valeurs (resp. des valeurs opposées) sur les faces opposées de la barre A .

De plus, il existe $w_0 \in L^2(A)$, $c \in \mathbb{R}$ et $R_0 > 0$ tels que

$$w = w_0 + c \quad \text{sur } A \setminus A(R_0).$$

Démonstration : L'existence de w est obtenue en appliquant le lemme de Lax Milgram à l'équation variationnelle

$$\forall v \in E, \quad \int_A DwDv \, dx = \int_Y v \, d\sigma$$

où $E = \{v; v \in L^2(A(R)) \text{ pour tout } R > 0, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(A) \text{ pour } 1 \leq i \leq N, v = 0 \text{ sur } T, v \text{ prend les mêmes valeurs sur les faces opposées de } A\}$ qui est un espace de Hilbert pour la norme $\|v\|_E^2 = \int_A |Dv|^2 \, dx$.

La dernière assertion résulte du lemme 3.1 de [17] sachant que $\frac{\partial w}{\partial x_N} \in L^2(A)$.

THÉORÈME 3.2 : Soit u_ε la solution de (D_ε) . Alors

1) $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$ où u est solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega_i) \\ -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega_i. \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

2) $\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon|_\Sigma \rightharpoonup -\frac{1}{2} \bar{w} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_\Sigma$ dans $w - L^2(\Sigma)$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |D(u_\varepsilon - u)|^2 \, dx \rightarrow \frac{1}{2} \bar{w} \int_\Sigma \left(\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_\Sigma \right)^2 \, d\sigma$$

où $\bar{w} = \int_Y w \, d\sigma$ et $\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_\Sigma$ désigne le saut sur Σ , i.e.

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_\Sigma = \frac{\partial u}{\partial \nu_1} \Big|_\Sigma + \frac{\partial u}{\partial \nu_2} \Big|_\Sigma.$$

De plus $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (u_\varepsilon - u) \rightarrow 0$ dans $w - H^1(\Omega)$ et $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (u_\varepsilon - u) \rightarrow 0$ dans $s - H^1(\Omega^a)$ où $\Omega^a = \{x \in \Omega ; d(x, \Sigma) > a\}$ et $a > 0$.

THÉORÈME 3.3 : Soit u_ε la solution de (N_ε) . Alors

1) $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $V = H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$, où u est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et $u \in H^2(\Omega)$.

2) $\frac{1}{\varepsilon} [u_\varepsilon]_\Sigma \rightarrow -2\bar{w} \frac{\partial u}{\partial \nu_1}$ dans $w - L^2(\Sigma)$, et

$$\frac{1}{\varepsilon} \|u_\varepsilon - u\|_V^2 \rightarrow 2\bar{w} \int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_1} \right)^2 d\sigma.$$

Si Ω est symétrique par rapport à Σ , $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (u_\varepsilon^1 - u^1 - (\tilde{u}_\varepsilon^2 - \tilde{u}^2)) \rightarrow 0$ dans $w - H^1(\Omega_1)$ et $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (u_\varepsilon^1 - u^1 - (\tilde{u}_\varepsilon^2 - \tilde{u}^2)) \rightarrow 0$ dans $s - H^1(\Omega_1^a)$ où $\Omega_1^a = \{x \in \Omega_1 ; d(x, \Sigma) > a\}$ et $a > 0$ et où \tilde{u}^2 désigne le symétrique de u^2 par rapport à Σ .

3.2. Démonstrations

Les démonstrations de ces deux théorèmes sont construites suivant le même schéma. On établit d'abord des estimations au voisinage de Σ et sur Σ pour des fonctions nulles sur T_ε , en appliquant le théorème de trace, l'inégalité de Poincaré et en effectuant des changements d'échelle puisque les trous ont une taille de l'ordre de la période ε (cf. Lemme 3.4). On en déduit alors, d'une part, les problèmes limites de (D_ε) (resp. (N_ε)) et la conclusion 1) du théorème 3.2. (resp. 3.3), et, d'autre part, que $\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon|_\Sigma$ (resp. $\frac{1}{\varepsilon} [u_\varepsilon]_\Sigma$) est borné dans $L^2(\Sigma)$. Il s'agit ensuite d'identifier leur valeur d'adhérence.

LEMME 3.4 : On note $E_\varepsilon^i = \{x \in \Omega_i ; 0 < d(x, \Sigma) < \varepsilon\}$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, quel que soit $\varepsilon > 0$ et quel que soit $v \in H^1(E_\varepsilon^i)$ tel que $v = 0$ sur T_ε ,

$$\int_{E_\varepsilon^i} |v|^2 dx \leq C\varepsilon^2 \int_{E_\varepsilon^i} |Dv|^2 dx$$

et

$$\int_{\Sigma} |v|^2 d\sigma \leq C\varepsilon \int_{E_\varepsilon^1} |Dv| dx.$$

Démonstration du Lemme 3.4: Soit P le pavé unité de \mathbb{R}^N et $\Sigma_P \supset T$ l'une de ses faces. D'après le théorème de trace, il existe une constante C dépendant de P telle que, pour tout $v \in H^1(P)$

$$\int_{\Sigma_P} |v(\sigma)|^2 d\sigma \leq C \left(\int_P |Dv(x)|^2 dx + \int_P |v(x)|^2 dx \right).$$

En faisant le changement d'échelle $x = \frac{y}{\varepsilon}$ et $\sigma = \frac{s}{\varepsilon}$ et en ajoutant on obtient, pour tout $v \in H^1(E_\varepsilon^1)$

$$\int_{\Sigma} |v(s)|^2 \frac{ds}{\varepsilon^{N-1}} \leq C \int_{E_\varepsilon^1} \varepsilon^2 |Dv(y)|^2 \frac{dy}{\varepsilon^N} + \int_{E_\varepsilon^1} |v(y)|^2 \frac{dy}{\varepsilon^N}$$

c'est-à-dire pour tout $v \in H^1(E_\varepsilon^1)$,

$$\int_{\Sigma} |v|^2 ds \leq C\varepsilon \int_{E_\varepsilon^1} |Dv|^2 dy + \frac{C}{\varepsilon} \int_{E_\varepsilon^1} |v|^2 dy.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante C dépendant de P telle que, pour tout $v \in H^1(P)$ tel que $v = 0$ sur T on ait

$$\int_P |v(x)|^2 dx \leq C \int_P |Dv(x)|^2 dx.$$

En faisant le changement d'échelle $x = \frac{y}{\varepsilon}$, on obtient, pour tout $v \in H^1(E_\varepsilon^1)$ tel que $v = 0$ sur T_ε :

$$\int_{E_\varepsilon^1} |v(y)|^2 \frac{dy}{\varepsilon^N} \leq C \int_{E_\varepsilon^1} \varepsilon^2 |Dv(y)|^2 \frac{dy}{\varepsilon^N}$$

c'est-à-dire

$$\int_{E_\varepsilon^1} |v|^2 dy \leq C\varepsilon^2 \int_{E_\varepsilon^1} |Dv|^2 dy$$

et le lemme en résulte. \square

Démonstration du Théorème 3.2

a) *Problème limite de (D_ε) .* Sous forme variationnelle, (D_ε) s'écrit :

$$(\tilde{D}_\varepsilon) \begin{cases} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), & u_\varepsilon = 0 \text{ sur } T_\varepsilon \\ \int_{\Omega} Du_\varepsilon Dv_\varepsilon dx = \int_{\Omega} fv_\varepsilon dx, \\ \text{pour tout } v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), & v_\varepsilon = 0 \text{ sur } T_\varepsilon. \end{cases}$$

En prenant $v_\varepsilon = u_\varepsilon$ dans (\tilde{D}_ε) , on en déduit que u_ε est borné dans $H_0^1(\Omega)$ donc (une sous-suite de) $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $w - H_0^1(\Omega)$. Puisque

$$\int_{\Omega_i} Du_\varepsilon Dv dx = \int_{\Omega_i} fv dx, \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega_i), \quad i = 1, 2,$$

on en déduit

$$\int_{\Omega_i} DuDv dx = \int_{\Omega_i} fv dx, \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega_i).$$

D'après le Lemme 3.4,

$$\int_{\Sigma} |u_\varepsilon|^2 d\sigma \leq C\varepsilon \int_{E_\varepsilon} |Du_\varepsilon|^2 dx$$

donc $u_\varepsilon|_{\Sigma} \rightarrow 0$ dans $L^2(\Sigma)$ et ainsi $u|_{\Sigma} = 0$ sur Σ . De plus, d'après (\tilde{D}_ε) appliqué avec $v_\varepsilon = u_\varepsilon - u$:

$$\int_{\Omega} Du_\varepsilon D(u_\varepsilon - u) dx = \int_{\Omega} f(u_\varepsilon - u) dx.$$

Comme $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $w - H^1(\Omega)$, on en déduit que

$$\int_{\Omega} |Du_\varepsilon|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} |Du|^2 dx$$

et donc $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$.

Ainsi, la solution u_ε de (D_ε) converge vers u fortement dans $H^1(\Omega)$ et u est l'unique solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega_i) \\ -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega_i. \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

De plus $u \in H^2(\Omega_i)$.

b) *Équation variationnelle vérifiée par $u_\varepsilon - u$.* Puisque u_ε et u vérifient

$$-\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega \setminus T_\varepsilon$$

et

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega_i$$

on a, pour tout $v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $v_\varepsilon = 0$ sur T_ε

$$\int_{\Omega_i} -\Delta(u_\varepsilon - u) v_\varepsilon dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Omega_i} D(u_\varepsilon - u) Dv_\varepsilon dx = \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial(u_\varepsilon - u)}{\partial\nu_i} v_\varepsilon = \int_{\Sigma \setminus T_\varepsilon} \frac{\partial(u_\varepsilon - u)}{\partial\nu_i} v_\varepsilon d\sigma.$$

Comme $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu_1} = -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu_2}$ sur $\Sigma \setminus T_\varepsilon$ par régularité de u_ε dans $\Omega \setminus T_\varepsilon$, on obtient

$$(1) \quad \int_{\Omega} D(u_\varepsilon - u) Dv_\varepsilon dx = - \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial u}{\partial\nu} \right]_{\Sigma} v_\varepsilon d\sigma,$$

pour tout $v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $v_\varepsilon = 0$ sur T_ε .

c) *Estimations sur u_ε .* On a

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |u_\varepsilon|^2 d\sigma &\leq C\varepsilon \int_{E_\varepsilon^i} |D(u_\varepsilon - u)|^2 dx, \quad \text{d'après le Lemme 3.4,} \\ &\leq C\varepsilon \int_{\Omega} |D(u_\varepsilon - u)|^2 dx \\ &\leq -C\varepsilon \int_{\Sigma \setminus T_\varepsilon} \left[\frac{\partial u}{\partial\nu} \right]_{\Sigma} u_\varepsilon d\sigma, \quad \text{d'après (1)} \\ &\leq C\varepsilon \left\| \left[\frac{\partial u}{\partial\nu} \right]_{\Sigma} \right\|_{L^2(\Sigma)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\varepsilon \left\| \left[\frac{\partial u}{\partial\nu} \right]_{\Sigma} \right\|_{L^2(\Sigma)}.$$

Ainsi $\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon|_{\Sigma}$ est borné dans $L^2(\Sigma)$. On déduit alors des inégalités précédentes que $\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} |D(u_\varepsilon - u)|^2 dx$ est borné et par suite $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (u_\varepsilon - u)$ a une

valeur d'adhérence dans $H^1(\Omega)$ faible. Puisque $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} u_\varepsilon|_\Sigma \rightarrow 0$ dans $L^2(\Sigma)$, on en déduit que $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (u_\varepsilon - u) \rightarrow 0$ dans $w - H^1(\Omega)$.

De plus, pour tout $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}_i)$, $\varphi = 0$ sur $\Omega \setminus \Omega_i$, on a d'après (1)

$$\int_{\Omega_i} D(u_\varepsilon - u) D(\varphi(u_\varepsilon - u)) dx = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_i} |D(u_\varepsilon - u)|^2 \varphi dx = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_i} D(u_\varepsilon - u) \cdot D\varphi \cdot (u_\varepsilon - u) dx \rightarrow 0.$$

Ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (u_\varepsilon - u) \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Omega_a).$$

d) *Identification des valeurs d'adhérence de $\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon|_\Sigma$ dans $L^2(\Sigma)$.* On définit d'abord des fonctions tests w_ε déduites de w de la manière suivante. Soit UA_ε^j un recouvrement de $\Sigma \times]-\infty, +\infty[$ tel que chaque A_ε^j et $T_\varepsilon^j \subset \Sigma$ soient respectivement les homothétiques de rapport ε de $Y \times]-\infty, +\infty[$ et de $T \subset Y$. Soit w_ε définie sur UA_ε^j par $w_\varepsilon(x) = \tilde{w}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ sur chaque barre A_ε^j , où \tilde{w} est le prolongement de w à $\tilde{A} = Y \times]-\infty, +\infty[$ par symétrie. Puisque Ω est borné, il existe R' tel que $\Omega \subset \Sigma \times]-R', +R'[= \Omega'$. On a $w_\varepsilon \in H^1(\Omega')$ et w_ε vérifie

$$\begin{cases} \Delta w_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Omega_i \\ w_\varepsilon = 0 & \text{sur } T_\varepsilon \\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} = \frac{1}{\varepsilon} & \text{sur } \Sigma \setminus T_\varepsilon \end{cases}$$

puisque $w \in H^1(A(R))$ pour tout $R > 0$ et que w (resp. $\frac{\partial w}{\partial \nu}$) prend les mêmes valeurs (resp. des valeurs opposées) sur les faces opposées de A . On a

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma \times]-\infty, +\infty[} |Dw_\varepsilon|^2 dx &\cong \sum_j \int_{A_\varepsilon^j} |Dw_\varepsilon|^2 dx = \frac{\text{mes } \Sigma}{\varepsilon^{N-1}} \int_{A_\varepsilon^j} |Dw_\varepsilon|^2 dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \text{mes } \Sigma \int_A |Dw|^2 dx. \end{aligned}$$

De plus w_ε est borné dans $L^2(\Omega)$; en effet

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} w_\varepsilon^2 dx &= \sum_j \int_{A'_j \cap \Omega'} w_\varepsilon^2 dx = \frac{\text{mes } \Sigma}{\varepsilon^{N-1}} \int_{A'_j \cap \Omega'} w_\varepsilon^2 dx \\ &= \varepsilon \text{mes } \Sigma \int_{\tilde{A}\left(\frac{R'}{\varepsilon}\right)} w^2 dx \\ &= \varepsilon \text{mes } \Sigma \left[\int_{\tilde{A}(R_0)} w^2 dx + \int_{\tilde{A}\left(\frac{R'}{\varepsilon}\right) \setminus \tilde{A}(R_0)} (w_0 + c)^2 dx \right], \end{aligned}$$

d'après le Lemme 3.1. Mais

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{A}\left(\frac{R'}{\varepsilon}\right) \setminus \tilde{A}(R_0)} (w_0 + c)^2 dx &\leq \int_{\tilde{A}\left(\frac{R'}{\varepsilon}\right)} (w_0^2 + 2cw_0 + c^2) dx \\ &\leq \int_{\tilde{A}} w_0^2 + 2c \left(\text{mes } \tilde{A}\left(\frac{R'}{\varepsilon}\right) \right)^{1/2} \left(\int_{\tilde{A}} w_0^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + c^2 \text{mes } \tilde{A}\left(\frac{R'}{\varepsilon}\right) \\ &\leq C_1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C_2 + \frac{1}{\varepsilon} C_3 \end{aligned}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes indépendantes de ε .

Par conséquent $\int_{\Omega'} w_\varepsilon^2 dx$ est borné.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Prenons $v_\varepsilon = \varphi w_\varepsilon$ dans l'équation variationnelle (1) vérifiée par $u_\varepsilon - u$. On obtient

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(u_\varepsilon - u) D(\varphi w_\varepsilon) dx = - \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{\Sigma} \varphi w_\varepsilon d\sigma,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(\varphi(u_\varepsilon - u)) Dw_\varepsilon dx - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (u_\varepsilon - u) D\varphi Dw_\varepsilon dx + \\ + \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(u_\varepsilon - u) D\varphi w_\varepsilon dx = - \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{\Sigma} \varphi w_\varepsilon d\sigma. \end{aligned}$$

Déterminons la limite de chaque intégrale de cette égalité.

$$\bullet \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{\Sigma} \varphi w_\varepsilon d\sigma \rightarrow \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{\Sigma} \varphi \bar{w} d\sigma, \text{ car } w_\varepsilon|_{\Sigma} \rightharpoonup \bar{w} \text{ dans } w - L^2(\Sigma),$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \int_{\Omega_i} D(\varphi(u_\varepsilon - u)) Dw_\varepsilon dx &= - \int_{\Omega_i} \varphi(u_\varepsilon - u) \Delta w_\varepsilon dx \\
 &+ \int_{\partial\Omega_i} \varphi(u_\varepsilon - u) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu_i} \\
 &= \int_{\Sigma} \varphi \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} d\sigma
 \end{aligned}$$

puisque $\Delta w_\varepsilon = 0$ sur Ω_i , $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$, $u = 0$ sur Σ , $u_\varepsilon = 0$ sur T_ε et $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu_i} = \frac{1}{\varepsilon}$ sur $\Sigma \setminus T_\varepsilon$,

$$\bullet \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (u_\varepsilon - u) D\varphi Dw_\varepsilon dx = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (u_\varepsilon - u) D\varphi \sqrt{\varepsilon} Dw_\varepsilon dx \rightarrow 0,$$

car $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (u_\varepsilon - u) \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega_i)$ et $\sqrt{\varepsilon} Dw_\varepsilon$ est borné dans $L^2(\Omega)$.

$$\bullet \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(u_\varepsilon - u) D\varphi w_\varepsilon dx \rightarrow 0, \text{ car } w_\varepsilon \text{ est borné dans } L^2(\Omega) \text{ et } u_\varepsilon - u \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Omega).$$

Finalement on obtient

$$2 \int_{\Sigma} \varphi \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} d\sigma \rightarrow -\bar{w} \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{\Sigma} \varphi d\sigma$$

et ceci pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Comme $\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon|_{\Sigma}$ est borné dans $L^2(\Sigma)$, on en déduit que

$$\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon|_{\Sigma} \rightharpoonup -\frac{1}{2} \bar{w} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{\Sigma} \text{ dans } w - L^2(\Sigma).$$

Puisque, d'après (1)

$$\int_{\Omega} |D(u_\varepsilon - u)|^2 dx = - \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{\Sigma} u_\varepsilon d\sigma$$

on obtient alors

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} |D(u_\varepsilon - u)|^2 dx \rightarrow \frac{1}{2} \bar{w} \int_{\Sigma} \left(\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{\Sigma} \right)^2 d\sigma. \quad \square$$

Démonstration du Théorème 3.3 : Le plan de la démonstration est le même que pour le Théorème 3.2 ; le Lemme 3.4 et les mêmes fonctions tests sont utilisés.

a) *Problème limite de (N_ε) .* Sous forme variationnelle, (N_ε) s'écrit :

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon) \\ \int_{\Omega_\varepsilon} (Du_\varepsilon Dv_\varepsilon + u_\varepsilon v_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} f v_\varepsilon, \quad \text{quel que soit } v_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(\tilde{N}_\varepsilon) \begin{cases} u_\varepsilon \in V, \quad [u_\varepsilon] = 0 \text{ sur } T_\varepsilon \\ \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (Du_\varepsilon Dv_\varepsilon + u_\varepsilon v_\varepsilon) = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f v_\varepsilon, \\ \text{quel que soit } v_\varepsilon \in V, \quad [v_\varepsilon] = 0 \text{ sur } T_\varepsilon. \end{cases}$$

En prenant $v_\varepsilon = u_\varepsilon$ dans (\tilde{N}_ε) , on en déduit que u_ε est borné dans V donc (une sous-suite de) $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $w - V$. Passant à la limite dans (\tilde{N}_ε) , on obtient

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (DuDv + uv) = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f v, \quad \text{quel que soit } v \in V, \quad [v] = 0 \text{ sur } \Sigma,$$

c'est-à-dire quel que soit $v \in H^1(\Omega)$.

Montrons que $[u_\varepsilon]_\Sigma \rightarrow 0$ dans $L^2(\Sigma)$. Notons $u_\varepsilon = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2) \in V$ et soit \tilde{u}_ε^2 le symétrique de u_ε^2 par rapport à Σ dans la bande E_ε^1 . Soit $h_\varepsilon = u_\varepsilon^1 - \tilde{u}_\varepsilon^2$. Alors $h_\varepsilon \in H^1(E_\varepsilon^1)$ et $h_\varepsilon|_\Sigma = [u_\varepsilon]_\Sigma$ donc $h_\varepsilon|_\Sigma = 0$ sur T_ε . D'après le Lemme 3.4, on a

$$\int_\Sigma |h_\varepsilon|^2 d\sigma \leq C\varepsilon \int_{E_\varepsilon^1} |Dh_\varepsilon|^2 dx$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_\Sigma ([u_\varepsilon]_\Sigma)^2 d\sigma &\leq C\varepsilon \int_{E_\varepsilon^1} |D(u_\varepsilon^1 - \tilde{u}_\varepsilon^2)|^2 dx \\ &\leq 2C\varepsilon \int_{E_\varepsilon^1} (|Du_\varepsilon^1|^2 + |D\tilde{u}_\varepsilon^2|^2) dx \\ &\leq 2C\varepsilon \|u_\varepsilon\|_V^2. \end{aligned}$$

Puisque u_ε est borné dans V , on en déduit que $[u_\varepsilon]_\Sigma \rightarrow 0$ dans $L^2(\Sigma)$. Par

conséquent $[u]_{\Sigma} = 0$. D'après $(\tilde{N}_{\varepsilon})$ écrit pour $v_{\varepsilon} = u_{\varepsilon} - u$, on a

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} Du_{\varepsilon} D(u - u) + u_{\varepsilon}(u_{\varepsilon} - u) = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(u_{\varepsilon} - u).$$

Comme $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u$ dans $w - V$, on obtient

$$\|u_{\varepsilon}\|_V^2 \rightarrow \|u\|_V^2.$$

Par suite $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ dans V . Puisque $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} (DuDv + uv) = \int_{\Omega} fv, \quad \text{quel que soit } v \in H^1(\Omega).$$

Ainsi u est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et par régularité, $u \in H^2(\Omega)$.

b) *Équation variationnelle vérifiée par $u_{\varepsilon} - u$.* Puisque u_{ε} et u vérifient

$$\begin{aligned} -\Delta u_{\varepsilon} + u_{\varepsilon} &= f & \text{dans } \Omega_{\varepsilon} \\ -\Delta u + u &= f & \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

on a, pour tout $v \in V$ tel que $[v]_{\Sigma} = 0$ sur T_{ε}

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} -\Delta(u_{\varepsilon} - u)v + (u_{\varepsilon} - u)v = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(u_{\varepsilon} - u)Dv + (u_{\varepsilon} - u)v &= \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial(u_{\varepsilon} - u)}{\partial \nu_1} v + \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial(u_{\varepsilon} - u)}{\partial \nu_2} v = \\ &= \int_{\Sigma \setminus T_{\varepsilon}} -\frac{\partial u}{\partial \nu_1} v_1 + \int_{T_{\varepsilon}} \frac{\partial(u_{\varepsilon} - u)}{\partial \nu_1} v_1 \\ &\quad + \int_{\Sigma \setminus T_{\varepsilon}} -\frac{\partial u}{\partial \nu_2} v_2 + \int_{T_{\varepsilon}} \frac{\partial(u_{\varepsilon} - u)}{\partial \nu_2} v_2 \\ &= - \int_{\Sigma \setminus T_{\varepsilon}} \frac{\partial u}{\partial \nu_1} [v]_{\Sigma} + \int_{T_{\varepsilon}} \frac{\partial(u_{\varepsilon} - u)}{\partial \nu_1} [v]_{\Sigma} = - \int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu_1} [v]_{\Sigma} \end{aligned}$$

en utilisant $\frac{\partial u}{\partial \nu_1} = -\frac{\partial u}{\partial \nu_2}$ sur Σ et $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_1} = -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_2}$ sur T_ε (régularité de u dans Ω et de u_ε localement dans Ω_ε).

Donc, quel que soit $v_\varepsilon \in V$ tel que $[v_\varepsilon]_\Sigma = 0$ sur T_ε

$$(2) \quad \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (D(u_\varepsilon - u) Dv_\varepsilon + (u_\varepsilon - u) v_\varepsilon) dx = - \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_1} [v_\varepsilon]_\Sigma d\sigma.$$

c) *Estimation sur u_ε .* Notons $u_\varepsilon = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2) \in V$ et $u = (u^1, u^2) \in V$. Soit \tilde{u}_ε^2 et \tilde{u}^2 les symétriques de u_ε^2 et u^2 par rapport à Σ dans la bande $E_{\varepsilon_0}^1$ ($\varepsilon_0 > 0$). Posons $k_\varepsilon = u_\varepsilon^1 - u^1 - (\tilde{u}_\varepsilon^2 - \tilde{u}^2)$.

Alors $k_\varepsilon \in H^1(E_\varepsilon^1)$ et $k_\varepsilon|_\Sigma = [u_\varepsilon]_\Sigma$. D'après le Lemme 3.4,

$$\int_\Sigma |k_\varepsilon|_\Sigma|^2 d\sigma \leq C\varepsilon \int_{E_\varepsilon^1} |Dk_\varepsilon|^2 dx.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_\Sigma ([u_\varepsilon]_\Sigma)^2 d\sigma &\leq 2C\varepsilon \int_{E_\varepsilon^1} (|D(u_\varepsilon^1 - u^1)|^2 + |D(\tilde{u}_\varepsilon^2 - \tilde{u}^2)|^2) dx \\ &\leq 2C\varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_V^2 \\ &\leq -2C\varepsilon \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_1} [u_\varepsilon]_\Sigma d\sigma, \quad \text{d'après (2)} \\ &\leq 2C\varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu_1} \right\|_{L^2(\Sigma)} \| [u_\varepsilon]_\Sigma \|_{L^2(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Par conséquent $\frac{1}{\varepsilon} [u_\varepsilon]_\Sigma$ est borné dans $L^2(\Sigma)$ et ainsi $\frac{1}{\varepsilon} \|u_\varepsilon - u\|_V^2$ est borné.

De plus, on a aussi $\frac{1}{\varepsilon} \int_{E_{\varepsilon_0}^1} |Dk_\varepsilon|^2 dx \leq C_1$ et $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} k_\varepsilon|_\Sigma \rightarrow 0$ dans $L^2(\Sigma)$, donc

$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} k_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $w - H^1(E_{\varepsilon_0}^1)$.

Si Ω est symétrique par rapport à Σ , on obtient que $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} k_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $w - H^1(\Omega_1)$. De plus pour tout $\varphi^i \in C^1(\bar{\Omega}_i)$, $\varphi_i = 0$ sur $\Omega \setminus \Omega_i$, on a d'après (2)

$$\int_{\Omega_i} D(u_\varepsilon^i - u^i) D(\varphi^i k_\varepsilon^i) + (u_\varepsilon^i - u^i) \varphi^i k_\varepsilon^i = 0$$

où $k_\varepsilon^1 = k_\varepsilon = u_\varepsilon^1 - u^1 - (\tilde{u}_\varepsilon^2 - \tilde{u}^2)$ et $k_\varepsilon^2 = -\tilde{k}_\varepsilon^1$.

D'où en ajoutant

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_1} |Dk_\varepsilon|^2 \varphi^1 + |k_\varepsilon|^2 \varphi^1 = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_1} Dk_\varepsilon \cdot k_\varepsilon D\varphi^1 \rightarrow 0.$$

Ainsi $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} k_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $H^1(\Omega_1^a)$.

d) *Identification des valeurs d'adhérence de $\frac{1}{\varepsilon} [u_\varepsilon]_\Sigma$ dans $L^2(\Sigma)$.* Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Sigma)$. Soit r^1 (resp. r^2) un relèvement régulier de $\frac{1}{2}\varphi$ (resp. $-\frac{1}{2}\varphi$) dans Ω_1 (resp. Ω_2) et soit $r = (r^1, r^2) \in V$. On peut toujours choisir $\varepsilon_0 > 0$ et r tels que le support de r soit contenu dans $E_{\varepsilon_0}^1 \cup \Sigma \cup E_{\varepsilon_0}^2$ et que $r^1 = -\tilde{r}^2$.

Prenons $v_\varepsilon = rw_\varepsilon$ dans (2) ; on a

$$[v_\varepsilon]_\Sigma = \frac{1}{2} \varphi w_\varepsilon - \left(-\frac{1}{2} \varphi w_\varepsilon \right) = \varphi w_\varepsilon|_\Sigma \quad \text{donc} \quad [v_\varepsilon]_\Sigma = 0 \quad \text{sur} \quad T_\varepsilon.$$

L'équation (2) s'écrit

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(u_\varepsilon - u) D(rw_\varepsilon) + (u_\varepsilon - u) rw = - \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_1} [rw_\varepsilon]_\Sigma d\sigma$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(r(u_\varepsilon - u)) Dw_\varepsilon - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (u_\varepsilon - u) Dr Dw_\varepsilon + \\ & + \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(u_\varepsilon - u) Dr w_\varepsilon + \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (u_\varepsilon - u) rw_\varepsilon = - \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_1} \varphi w_\varepsilon|_\Sigma d\sigma. \end{aligned}$$

Déterminons la limite de chacune des intégrales de cette égalité :

- $\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_1} \varphi w_\varepsilon|_\Sigma d\sigma \rightarrow \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_1} \varphi \bar{w} d\sigma.$
- $\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(u_\varepsilon - u) Dr w_\varepsilon$ et $\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (u_\varepsilon - u) rw_\varepsilon$ tendent vers zéro car w_ε est borné dans $L^2(\Omega)$ et $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans V .

$$\begin{aligned}
\bullet \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (u_\varepsilon - u) DrDw_\varepsilon &= \int_{E_{\varepsilon_0}} (u_\varepsilon - u) DrDw_\varepsilon = \\
&= \int_{E_{\varepsilon_0}^1} (u_\varepsilon^1 - u^1) Dr^1 Dw_\varepsilon - \int_{E_{\varepsilon_0}^2} (u_\varepsilon^2 - u^2) Dr^1 Dw_\varepsilon \\
&= \int_{E_{\varepsilon_0}^1} (u_\varepsilon^1 - u^1 - \tilde{u}_\varepsilon^2 + \tilde{u}^2) Dr_1 Dw_\varepsilon = \int_{E_{\varepsilon_0}^1} k_\varepsilon Dr_1 Dw_\varepsilon .
\end{aligned}$$

D'après c), $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} k_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L^2(E_{\varepsilon_0}^1)$. Comme $\sqrt{\varepsilon} Dw_\varepsilon$ est borné dans $L^2(\Omega)$, on a donc $\int_{E_{\varepsilon_0}^1} k_\varepsilon DrDw_\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
\bullet \int_{\Omega_i} D(r(u_\varepsilon - u)) Dw_\varepsilon dx &= \\
&= - \int_{\Omega_i} r^i (u_\varepsilon^i - u^i) \Delta w_\varepsilon dx + \int_{\partial\Omega_i} r^i (u_\varepsilon^i - u^i) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu_i} \\
&= \int_{\Sigma} r^i (u_\varepsilon^i - u^i) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu_i} d\sigma .
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} D(r(u_\varepsilon - u)) Dw_\varepsilon dx &= \int_{\Sigma} r^1 (u_\varepsilon^1 - u^1) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu_1} d\sigma \\
&+ \int_{\Sigma} r^2 (u_\varepsilon^2 - u^2) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu_2} d\sigma \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \varphi \frac{[u_\varepsilon]_\Sigma}{\varepsilon} d\sigma .
\end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \varphi \frac{[u_\varepsilon]_\Sigma}{\varepsilon} d\sigma \rightarrow -\bar{w} \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu_1} d\sigma$$

et ceci quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Sigma)$. Comme $\frac{1}{\varepsilon} [u_\varepsilon]_\Sigma$ est borné dans $L^2(\Sigma)$, on en déduit que

$$\frac{1}{\varepsilon} [u_\varepsilon]_\Sigma \rightharpoonup -2\bar{w} \frac{\partial u}{\partial \nu_1} \quad \text{dans } w - L^2(\Sigma) .$$

Comme d'après (2),

$$\|u_\varepsilon - u\|_V^2 = - \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial v_1} [u_\varepsilon]_\Sigma d\sigma$$

on obtient ainsi

$$\frac{1}{2} \|u_\varepsilon - u\|_V^2 \rightarrow 2 \bar{w} \int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial v_1} \right)^2 d\sigma. \quad \square$$

3.3. Utilisation de l'épi-convergence

Le Théorème 3.2 (resp. 3.3) peut aussi être obtenu en déterminant l'épilimite de la suite de fonctionnelles :

$$F_\varepsilon(v) = \varepsilon \int_\Omega |Dv|^2 dx + I_{\{v \in H_0^1(\Omega); v|_\Sigma = 0 \text{ sur } T_\varepsilon\}}(v)$$

$$\text{(resp. } G_\varepsilon(v) = \varepsilon \|v\|_V^2 + I_{\{v \in V; [v]_\Sigma = 0 \text{ sur } T_\varepsilon\}}(v))$$

relativement à la topologie τ définie par : v_ε converge vers v pour τ ssi $v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ et $v_\varepsilon|_\Sigma \rightharpoonup v|_\Sigma$ dans $w - L^2(\Sigma)$ (resp. $v_\varepsilon \in V$ et $[v_\varepsilon]_\Sigma \rightharpoonup [v]_\Sigma$ dans $w - L^2(\Sigma)$).

La démarche à suivre est analogue à celle développée au § 2. Par cette méthode, les fonctions tests w et w_ε s'introduisent naturellement. Nous renvoyons à [15], chapitre B.III pour une présentation détaillée de cette méthode.

Remerciements. Je tiens à exprimer ma gratitude à H. Attouch, A. Damlamian et F. Murat pour les discussions fructueuses et les encouragements prodigués pendant l'élaboration de ce travail.

REFERENCES

- [1] H. ATTOUCH, *Variational convergence for functions and operators*, Applicable Math. Series, Pitman, London (1984).
- [2] H. ATTOUCH, A. DAMLAMIAN, F. MURAT, C. PICARD, *The Neumann Sieve* (à paraître).
- [3] H. ATTOUCH, C. PICARD, *Variational inequalities with varying obstacles*, J. Functional Analysis, 50 (1983), 329-386.
- [4] H. ATTOUCH, C. PICARD, *Comportement limite de problèmes de transmission unilatéraux à travers des grilles de forme quelconque*; Rend. Sem. Math. Univers. Politecn. Torino (à paraître).

- [5] D. CIORANESCU, F. MURAT, *Un terme étrange venu d'ailleurs*, Collège de France Seminar, Research Notes in Mathematics, Pitman, London (1982) n° 60, p. 98-138, n° 70, p. 154-178.
- [6] G. DAL MASO, P. LONGO, *Γ -limits of obstacles*, Ann. mat. Pura Appl., 128 (1981), 1-50.
- [7] A. DAMLAMIAN, *Le problème de la passoire de Neumann*, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino, 43 (1985), 427-454.
- [8] E. DE GIORGI, G. DAL MASO, P. LONGO, *Γ -limiti di ostacoli*, Rend. Acad. Naz. Lincei, 68 (1980), 481-487.
- [9] E. DE GIORGI, T. FRANZONI, *Su un tipo di convergenza variazionale*, Rend. Acad. Naz. Lincei, 58 (1975), 842-850.
- [10] J. L. LIONS, *Some methods in the mathematical Analysis of systems and their control*, Science Press, Beijing, China (1981).
- [11] V. A. MARCHENKO, E. A. HROUSLOV, *Problèmes aux limites dans les domaines à frontière finement granulée*, Kiev, 1974.
- [12] F. MURAT, *The Neumann sieve, Non-linear variational problems*, ed. by A. Marino, Research Notes in Mathematics, Pitman, London, 127 (1985), 24-32.
- [13] G. NGUETSENG, *Problèmes d'écrans perforés pour l'équation de Laplace*, M²AN, 19 (1985), 33-63.
- [14] C. PICARD, *Comportement limite d'un problème de Neumann dans un domaine contenant une grille*, Public. U.E.R. de Math. de Lille (1983), vol. 5, fasc. 2.
- [15] C. PICARD, *Analyse limite d'équations variationnelles dans un domaine contenant une grille*, in Thèse d'État, Université de Paris-Sud (Orsay), (1984).
- [16] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Boundary value problems in domains containing perforated walls*, Collège de France Seminar, Research Note in Math., Pitman, London, n° 70 (1982), 309-325.
- [17] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Problèmes mathématiques liés à l'écoulement d'un fluide visqueux à travers une grille*, E. De Giorgi Colloquium, Krée ed., Research Notes in Math., Pitman, London, n° 125 (1985).