Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

MICHEL DEZA
PAUL ERDÖS

Extensions de quelques théorèmes de densité

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 1 (1974-1975), exp. n° 8, p. 1-2.
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_1_A5_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° 8, 2 p.

16 décembre 1974

EXTENSIONS DE QUELQUES THÉORÈMES DE DENSITÉ

par Michel DEZA et Paul ERDÖS

Résumé.

Pour une série $A = \{A_k\}$ de sous-ensembles finis de $\underset{\sim}{N}$, on introduit les densités

$$\sigma(A) = \inf_{m\leqslant n} A(m)/2^m \ , \quad d_{\inf}(A) = \liminf_{n\to\infty} A(n)/2^n \ ,$$

où $A(m)$ est le nombre d'ensembles $A_k \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$. L'ensemble de toutes les parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ devient, pour les opérations $a \cup b$, $a \cap b$, $a * b = a \cup b - a \cap b$, un sous-groupe fini $N^{\cup}$, $N^{\cap}$ ou un groupe N^{*} respectivement. Pour $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, on démontre l'analogue du théorème de Erdös-Landau

$$\sigma(A + B) \geqslant \sigma(A)(1 + (2\lambda)^{-1}(1 - \sigma(A)) \ ,$$

où B est une base de $\underset{\sim}{N}$ d'ordre moyen λ. On démontre pour $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, N^{*} l'analogue du théorème de Schnirelmann (si $\sigma(A) + \sigma(B) > 1$, alors $\sigma(A+B) = 1$) et les inégalités $\lambda \leqslant 2h$, où h est l'ordre de base. On introduit le rapport de divisibilité des ensembles $a|b$, si b est une continuation de a. On démontre l'analogue du théorème de Davenport-Erdös : si $d_{\inf}(A) > 0$, alors il existe une sous-série infinie $\{A_{k_r}\}$, où $A_{k_r} | A_{k_{r+1}}$, pour $r = 1, 2, \ldots$ On envisage aussi pour $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, N^{*} les analogues de l'inégalité de Rohrbach : $\sqrt{2n} \leqslant g(n) \leqslant 2\sqrt{n}$, où $g(n) = \min k$ pour les ensembles $\{a_1 < \ldots < a_k\} \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ tels que, pour tout $m \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, on a $m = a_i + a_j$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. N.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1 and 2. - Providence, American mathematical Society, 1961, 1967 (Mathematical Surveys, 7).

[2] DEZA (M.). - Racine minimum d'un groupe abélien élémentaire, Canad. J. Math. (à paraître).

[3] ERDÖS (P.). - On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers, Acta Arith., Warszawa, t. 1, 1936, p. 197-200.

[4] ERDÖS (P.). - Problems and results on a combinatorial number theory, "A survey of combinatorial theory", p. 117-138. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1973.

[5] ERDÖS (P.) and KLEITMAN (D. J.). - Extremal problems among subsets of set, Discrete Mathematics, t. 8, 1974, p. 281-294.

[6] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - Sequences. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.

[7] MANN (H. B.). - Addition theorems : The addition theorems of group theory and number theory. - New York, Interscience Publishers, 1965 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 18).

(Texte reçu le 9 décembre 1974)

Michel DEZA
3 rue de Duras
75008 PARIS