Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Michel Waldschmidt

Indépendance algébrique par la méthode de G. V. Čudnovskij

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1974-1975), exp. n° G8, p. G 1-G 18.

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A9_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'Etude de théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° G8, 18 p.

27 janvier 1975

INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE PAR LA MÉTHODE DE G. V. ČUDNOVSKIJ

par Michel WALDSCHMIDT

En 1949, A. O. GEL'FOND créa une nouvelle méthode de transcendance permettant de démontrer l'indépendance algébrique de deux nombres complexes (par exemple $2^{\sqrt[3]{2}}$, $2^{\sqrt[3]{4}}$). En 1971, D. BROWNAWELL et A. A. SMELEV, indépendamment, appliquèrent cette méthode à l'indépendance algébrique de trois nombres (parmi une famille de nombres complexes définis comme valeurs de la fonction exponentielle) ; l'un des outils de BROWNAWELL et SMELEV est la connaissance du type de transcendance de certains corps, c'est-à-dire de mesures de transcendance de certains nombres.

En 1973, G. V. ČUDNOVSKIJ obtint, par une remarquable et ingénieuse extension de la méthode de GEL'FOND, l'indépendance algébrique de trois nombres sans utiliser de type de transcendance. Nous présentons cette méthode, en montrant comment l'utilisation d'un type de transcendance permet d'obtenir l'indépendance algébrique de 4 nombres.

1. Indépendance algébrique de puissances algébriques de nombres algébriques.

Soient α, β deux nombres algébriques, $\alpha \neq 0$, $\log \alpha \neq 0$, $\beta \notin \mathbb{Q}$. D'après un théorème classique de Gel'fond-Schneider, le nombre $\alpha^\beta = \exp(\beta \log \alpha)$ est transcendant. En 1949, A. O. GEL'FOND [6] montra que, si β est irrationnel cubique, alors α^β, α^{β^2} sont algébriquement indépendants. Plus généralement, si $d = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] \geq 3$, deux des nombres $\alpha^\beta, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}$ sont algébriquement indépendants. Il conjectura alors que le degré de transcendance q sur $\mathbb{Q}$ du corps $\mathbb{Q}(\alpha^\beta, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}})$, où $d = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$, devait être égal à $d - 1$ (Ce problème est évidemment un cas particulier de la conjecture de SCHANUEL). Les résultats connus étaient donc :

$$d \geq 2 \Longrightarrow q \geq 1 ;$$

$$d \geq 3 \Longrightarrow q \geq 2 .$$

Le premier énoncé d'indépendance algébrique de trois de ces nombres fut donné en 1971 par A. A. SMELEV [7] :

$$d \geq 19 \Longrightarrow q \geq 3 .$$

A la même époque, D. BROWNAWELL obtint des résultats généraux (voir [1]) dont on peut déduire ([10], exercice 7.2.e) :

$$d \geq 15 \Longrightarrow q \geq 3 .$$

Les méthodes de Smelev et Brownawell reposaient de manière essentielle sur une mesure de transcendance de α^β ; le meilleur résultat actuellement connu dans ce domaine est dû à A. O. GEL'FOND [6] (voir aussi [3]) :

Soit $\varepsilon > 0$; il existe un nombre $S_0(\varepsilon , \log \alpha , \beta)$, effectivement calculable, tel que, pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $\leqslant N$ et de hauteur $\leqslant H$, on ait

$$(1.1) \qquad \log|P(\alpha^\beta)| > - N^3.S.(1 + \log N)^{-3}.(\log S)^{2+\varepsilon} ,$$

où $S = \max\{S_0(\varepsilon , \log \alpha , \beta) \ ; \ N + \log H\}$.

Un autre outil, essentiel à ces méthodes, était un critère de transcendance de GEL'FOND [6], amélioré depuis par plusieurs auteurs (voir [10], chapitre 5) :

(1.2) Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$, de type fini sur $\mathbb{Q}$; on suppose qu'il existe une suite (ξ_N) d'éléments de K , de taille $\leqslant t_N$, avec $\log|\xi_N| \ll - t_N^2$. Alors le degré de transcendance de K sur $\mathbb{Q}$ est supérieur ou égal à 2 (L'énoncé exact, avec les hypothèses précises concernant la suite t_N , est donné à la proposition 2.1).

Une généralisation très adroite de cette méthode d'indépendance algébrique avait permis à N. I. FEL'DMAN et A. O. GEL'FOND [5] de donner une mesure d'indépendance algébrique de α^β , α^{β^2} , quand β est irrationnel cubique $(d = 3)$. La mesure obtenue est très grossière :

$$\log|P(\alpha^\beta , \alpha^{\beta^2})| > - \exp(S^{4+\varepsilon}) ,$$

mais la méthode est intéressante : en 1971, A. A. SMELEV [8] montre comment les idées de FEL'DMAN et GEL'FOND devraient permettre de démontrer : $d \geqslant 7 \Longrightarrow q \geqslant 3$. Mais la démonstration de SMELEV était incomplète (voir [8], p. 96-97 ; si q_1 , q_2 sont deux éléments de $\mathbb{Z}[X_1 , X_2]$, de p. g. c. d. D , les polynômes q_1 , q_2/D ne sont pas, en général, premiers entre eux). En 1973, G. V. ČUDNOVSKIJ [4] démontra tous les résultats annoncés par SMELEV, en particulier

$$d \geqslant 7 \Longrightarrow q \geqslant 3 ;$$

ainsi, quand β est un nombre algébrique de degré 7 sur $\mathbb{Q}$, trois des six nombres

$$\alpha^\beta , \alpha^{\beta^2} , \ldots , \alpha^{\beta^6}$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Une des idées de la méthode consiste à écrire le critère (1.2) sous la forme suivante :

(1.3) Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$, de type fini sur $\mathbb{Q}$; on suppose qu'il existe deux suites d'éléments de K , (η_N) et (θ_N) , de taille $\leqslant t_N$, telles que

$$\log|\eta_N| \ll - t_N^4 , \quad \log|\theta_N| \ll - t_N^4 .$$

On suppose de plus θ_N et η_N premiers entre eux (en un sens que l'on précisera). Alors le degré de transcendance de K sur $\mathbb{Q}$ est supérieur ou égal à 3. (L'énoncé précis est une conséquence des propositions 2.1 et 2.7).

Pour déduire le critère (1.3) de (1.2), on choisit un nombre transcendant $x \in K$, on considère θ_N et η_N comme des polynômes en x à coefficients dans un sous-corps de K, et on applique (1.2) à la suite des résultants ξ_N de θ_N et η_N par rapport à x.

Nous présentons la méthode de ČUDNOVSKIJ sous une forme générale (en suivant le plan du chapitre 7 de [10]). Nous montrons ainsi comment on peut obtenir, grâce à un critère de Brownawell (lemme 2.2) et à la mesure (1.1),

$$d \geq 31 \Longrightarrow q \geq 4 .$$

A la fin de son article [4], ČUDNOVSKIJ annonce avoir généralisé ses résultats pour obtenir, pour tout $n \geq 2$,

$$d \geq 2^n - 1 \Longrightarrow q \geq n ,$$

autrement dit

$$q \geq \frac{\log(d+1)}{\log 2} \quad \text{pour} \quad d \geq 2 .$$

(Signalons une faute de frappe dans [4], qui m'a été indiquée par ČUDNOVSKIJ : p. 670 dans l'article original, en russe, et p. 397 dans la traduction, il faut lire :

$$Y = [\delta_X^{1/(\varkappa-1)} . t_X^{-1/(\varkappa-1)} . \ln^{1/8} X] \quad \text{au lieu de} \quad Y = [\delta_X^{1/(\varkappa-1)} . X^{-1/(\varkappa-1)} . \ln^{1/8} X] .)$$

Notations. - Nous utiliserons les notations de [10].

Si $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_q]$ est un polynôme non nul en q variables à coefficients entiers, nous noterons $H(P)$ sa hauteur (maximum des valeurs absolues de ses coefficients), $\deg_{X_i} P$ son degré par rapport à X_i, $(1 \leq i \leq q)$, et $\deg P$ son degré (total). Nous utiliserons la notion de taille sur une extension de $\mathbb{Q}$ de type fini munie d'un système générateur. Enfin, nous considèrerons le type de transcendance de certains corps ; ainsi; pour α, β algébriques $(\alpha \neq 0$, $\log \alpha \neq 0$, $\beta \notin \mathbb{Q})$ et $\varepsilon > 0$, d'après (1.1), le corps $\mathbb{Q}(\alpha^\beta)$ a un type $\leq 4+\varepsilon$. D'autre part, CIJSOUW [3] a démontré que le corps $\mathbb{Q}(e)$ avait un type de transcendance ≤ 3.

2. Les critères de transcendance de Gel'fond et Brownawell.

(a) Enoncés.

La méthode d'indépendance algébrique de Gel'fond repose sur un critère de transcendance [6] qu'il avait démontré en 1949, et dont voici un énoncé simplifié ([10], 5.1.4).

PROPOSITION 2.1. - Soient K un sous-corps de $\mathbb{C}$, de type fini sur $\mathbb{Q}$, et t

une taille sur K . *Il existe une constante* $C > 0$ *ayant la propriété suivante.*

Soit $(t_N)_{N\geq N_0}$ *une suite croissante de nombres réels telle que*

$$\lim_{N\to\infty} t_N = +\infty \text{ , et } t_{N+1} \leq 2t_N \text{ pour tout } N \geq N_0 \text{ .}$$

On suppose qu'il existe une suite $(\xi_N)_{N\geq N_0}$ *d'éléments non nuls de* K *telle que*

$$t(\xi_N) \leq t_N \text{ et } \log|\xi_N| \leq -C.t_N^2$$

pour tout $N \geq N_0$. *Alors le degré de transcendance de* K *sur* $\mathbb{Q}$ *est supérieur ou égal à* 2 .

Comme l'a remarqué D. BROWNAWELL ([1], théorème 4.3), on peut remplacer, dans la proposition 2.1, le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels par un corps L de type de transcendance fini sur $\mathbb{Q}$. Voici la généralisation de 2.1 que l'on obtient ainsi.

PROPOSITION 2.2. - *Soient* K *un sous-corps de* $\mathbb{C}$, *de type fini sur* $\mathbb{Q}$, t *une taille sur* K , *et* L *un sous-corps de* K , *de type de transcendance inférieur ou égal à* τ *sur* $\mathbb{Q}$. *Il existe une constante* $C = C(K , t , L , \tau) > 0$ *ayant la propriété suivante.*

Soit $(t_N)_{N\geq N_0}$ *une suite croissante de nombres réels tels que*

$$\lim_{N\to\infty} t_N = +\infty \text{ ; } t_{N+1} \leq 2t_N \text{ pour tout } N \geq N_0 \text{ .}$$

On suppose qu'il existe une suite $(\xi_N)_{N\geq N_0}$ *d'éléments non nuls de* K *telle que*

$$t(\xi_N) \leq t_N \text{ et } \log|\xi_N| \leq -C.t_N^{2\tau} \text{ ,}$$

pour tout $N \geq N_0$.

Alors le degré de transcendance de K *sur* L *est supérieur ou égal à* 2 .

(b) Elimination.

Un outil très utile dans la démonstration des propositions 2.1 et 2.2, ainsi que dans les applications de ces propositions, est le résultant $R(f , g)$ de deux polynômes $f , g \in \mathbb{C}[X]$; rappelons que $R(f , g)$ est un nombre complexe, qui est nul si, et seulement si, f et g ont un zéro commun dans $\mathbb{C}$.

Notations. - Soient $x_1 , \ldots , x_q$ des nombres complexes algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On notera $\underline{x} = (x_1 , \ldots , x_q)$, $\underline{x}' = (x_1 , \ldots , x_{q-1})$. Pour simplifier, on supposera $\max_{1\leq i\leq q}|x_i| \leq 1$.

Le but des lemmes suivants est de construire, à partir de polynômes de

$$\mathbb{Z}[\underline{x}] = \mathbb{Z}[x_1 , \ldots , x_q] \text{ ,}$$

des polynômes de $\mathbb{Z}[\underline{x}'] = \mathbb{Z}[x_1 , \ldots , x_{q-1}]$.

Voici d'abord une amélioration, par D. BROWNAWELL ([1], lemme 3.8) d'un résultat de GEL'FOND ([6], chap. III, §4, lemme V).

LEMME 2.3. - *Soient* F *et* G *deux éléments de* $\mathbb{Z}[\underline{x}]$, *et soit* $R \in \mathbb{Z}[\underline{x}']$ *leur* résultant. Notons

$$f = \deg_{x_q} F \; ; \; g = \deg_{x_q} G \; ;$$
$$h_f = \log H(F) \; ; \; h_G = \log H(G) \; .$$

Alors

$$\deg_{x_j} R \leqslant g \deg_{x_j} F + f \deg_{x_j} G \, , \qquad (1 \leqslant j \leqslant q-1) \; ;$$
$$\log H(R) \leqslant gh_F + fh_G + (f+g)\log(f+g) + \sum_{\ell=1}^{q-1}[g \log(1+\deg_{x_\ell} F) + f \log(1+\deg_{x_\ell} G)] \, ,$$

et

$$\log|R(\underline{x}')| \leqslant \log \max\{|F(\underline{x})| \; ; \; |G(\underline{x})|\} + fh_G + gh_F + (f+g)\log(f+g) \; .$$

Voici une première application de la technique du résultant, où l'on montre que dans certains problèmes, on peut se ramener au cas de polynômes irréductibles.

LEMME 2.4. - Soit $P \in \mathbb{Z}[\underline{x}]$ un polynôme non nul de degré total $\leqslant d$ et de hauteur $\leqslant e^h$, tel que

$$\log|P(\underline{x})| < -d(\lambda_1 h + \lambda_2 d) \, ,$$

avec $\lambda_1 > 6$, $\lambda_2 > 6(q+1)$.

On suppose que, pour tout polynôme non nul $R \in \mathbb{Z}[\underline{x}']$ vérifiant

$$\deg R \leqslant 2d^2 \; ; \quad \log H(R) \leqslant 2d[h + 2qd + 1] \, ,$$

on a

$$\log|R(\underline{x}')| \geqslant -\frac{d}{3}[(\lambda_1 - 6)h + (\lambda_2 - 6q - 6)d] \; . \tag{2.5}$$

Alors il existe un diviseur Q de P , puissance d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{Z}[\underline{x}]$, vérifiant

$$\log H(Q) \leqslant h + qd \; ; \quad \deg Q \leqslant d \; ;$$
$$\log|Q(\underline{x})| \leqslant -\frac{d}{3}(\lambda_1 h + \lambda_2 d) \; .$$

Pour $q = 1$, $\mathbb{Z}[x'] = \mathbb{Z}$, et on retrouve le lemme 5.3.5 de [10].

L'hypothèse (2.5) est beaucoup moins forte qu'une hypothèse sur le type de transcendance du corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_{q-1})$; ici en effet, l'inégalité n'est supposée vérifiée que pour un nombre fini de polynômes R .

Démonstration du lemme 2.4. - La démonstration est inspirée de celles de BROWNAWELL [1], lemme 4.1, et de ČUDNOVSKIJ [4], lemme 2.

Si Q_1 et Q_2 sont deux diviseurs relativement premiers de P , leur hauteur est majorée par e^{h+qd} (grâce à l'inégalité

$$H(P_1) \ldots H(P_m) \leqslant H(P).\exp(\textstyle\sum_{i=1}^{q} \deg_{x_i} P) \tag{2.6}$$

pour $P = P_1 \ldots P_m$, $P_j \in \mathbb{Z}[\underline{x}]$; voir par exemple [6], chap. III, §4, lemme II, ou [10], lemme 4.2.14). Donc le résultant $R \in \mathbb{Z}[\underline{x}']$ de Q_1 et Q_2 par rapport à

x_q vérifie, d'après le lemme 2.3

$$\deg R \leqslant 2d^2 ;$$

$$\log H(R) \leqslant 2d(h + qd) + 2d \log 2d + 2(q - 1)\, d \log(1 + d)$$
$$\leqslant 2d[h + 2qd + 1] ,$$

et

$$\log|R(\underset{\sim}{x}')| \leqslant \log \max\{|Q_1(\underset{\sim}{x})| \ ; \ |Q_2(\underset{\sim}{x})|\} + 2d(h + qd) + 2d \log 2d .$$

On majore $2d(h + qd) + 2d \log 2d$ par $2d[h + (q + 1)d]$, et on utilise l'hypothèse (2.5) :

$$\log \max\{|Q_1(\underset{\sim}{x})| \ ; \ |Q_2(\underset{\sim}{x})|\} \geqslant -\frac{d}{3}(\lambda_1 h + \lambda_2 d) .$$

Décomposons maintenant P en puissances de polynômes irréductibles de $\mathbb{Z}[\underset{\sim}{x}]$:

$$P = a\, P_1 \dots P_m , \quad (a \in \mathbb{Z} , a \neq 0) ,$$

ordonnés de telle manière que

$$|P_1(\underset{\sim}{x})| \leqslant |P_2(\underset{\sim}{x})| \leqslant \dots \leqslant |P_m(\underset{\sim}{x})| .$$

Comme $|P(\underset{\sim}{x})| < 1$ et que $|a| \geqslant 1$, il existe un entier j , $1 \leqslant j \leqslant m$, tel que

$$|a| . \prod_{\ell=1}^{j-1} |P_\ell(\underset{\sim}{x})| \geqslant \prod_{h=j}^{m} |P_h(\underset{\sim}{x})| ,$$

et

$$|a| . \prod_{\ell=1}^{j} |P_\ell(\underset{\sim}{x})| < \prod_{h=j+1}^{m} |P_h(\underset{\sim}{x})| .$$

On en déduit :

$$|a| . \prod_{\ell=1}^{j-1} |P_\ell(\underset{\sim}{x})| \geqslant \exp\{-\frac{d}{3}(\lambda_1 h + \lambda_2 d)\} ,$$

et

$$\prod_{h=j+1}^{m} |P_h(\underset{\sim}{x})| \geqslant \exp\{-\frac{d}{3}(\lambda_1 h + \lambda_2 d)\} .$$

Donc

$$|P(\underset{\sim}{x})| \geqslant |P_j(\underset{\sim}{x})| . \exp\{-\frac{2}{3} d(\lambda_1 h + \lambda_2 d)\} ,$$

ce qui démontre le lemme 2.4 avec $Q = P_j$.

Voici une conséquence facile, et utile, du lemme 2.4.

PROPOSITION 2.7. - *Soient* $P_1 , \dots , P_s$ $(s \geqslant 2)$ *des éléments de* $\mathbb{Z}[\underset{\sim}{x}]$, *premiers entre eux dans leur ensemble*, *de degré* $\leqslant d$ *et de hauteur* $\leqslant e^h$, *vérifiant*

$$\log|P_j(\underset{\sim}{x})| \leqslant -d(\lambda_1 h + \lambda_2 d) , \quad (1 \leqslant j \leqslant s) ,$$

avec $\lambda_1 > 6$, $\lambda_2 > 6(q + 1)$.

Alors il existe un polynôme non nul $R \in \mathbb{Z}[\underset{\sim}{x}']$, *de degré* $\leqslant 2d^2$ *et de hauteur* $\leqslant 2d(h + qd + 1)$, *vérifiant*

$$\log|R(\underset{\sim}{x}')| \leqslant -\frac{d}{3}[(\lambda_1 - 6)h + (\lambda_2 - 6q - 6)d] .$$

Démonstration. - La démonstration s'effectue par l'absurde. Si un tel polynôme R n'existe pas, le lemme 2.4 permet de construire, pour $1 \leq j \leq s$, un diviseur Q_j de P_j, puissance d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{Z}[\underline{x}]$, vérifiant

$$\log H(Q_j) \leq h + qd \ ; \quad \deg Q_j \leq d \ ;$$
$$\log|Q_j(\underline{x})| \leq -\frac{d}{3}(\lambda_1 h + \lambda_2 d) .$$

Comme les polynômes $P_1, \dots, P_s$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, avec $s \geq 2$, deux des polynômes Q_j ont un résultant $R \in \mathbb{Z}[\underline{x}']$ non nul. Ce résultant vérifie :

$$\log H(R) \leq 2d(h + 2qd + 1) \ ; \quad \deg R \leq 2d^2 \ ;$$
$$\log|R(\underline{x}')| \leq -\frac{d}{3}(\lambda_1 h + \lambda_2 d) + 2d[h + (q+1)d] ,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Notons qu'on aurait pu aussi démontrer la proposition 2.7 en utilisant les déterminants de Kronecker ([8], lemme 7).

(c) Réduction.

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ de type fini sur $\mathbb{Q}$. Alors K est une extension algébrique finie d'un corps K_0 qui est lui-même une extension transcendante pure de $\mathbb{Q}$. Si $(x_1, \dots, x_q, y)$ est un système générateur de K, alors

$$K_0 = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_q) ,$$

et $K = K_0(y)$. La norme de K sur K_0 permet de réduire les énoncés concernant K à des énoncés concernant K_0, donc à des problèmes sur les polynômes en $x_1, \dots, x_q$ (voir [10], lemme 4.2.20). Si $\alpha \in K$ est petit, sa norme dans K_0 est petite ; la réciproque n'est pas vraie en général, l'un des conjugués de α pouvant être plus petit que $|\alpha|$. Voici néanmoins un exemple dans lequel $\alpha \in K$ est petit, mais pas trop, et où on montre que la norme de α dans K_0 est petite, mais pas trop. La démonstration repose sur les idées de ČUDNOVSKIJ [4] (voir aussi [2], lemme 6).

LEMME 2.8. - Soit $\xi \in \mathbb{C}$ entier algébrique sur $\mathbb{Z}[\underline{x}]$, de degré δ, dont le polynôme minimal sur $\mathbb{Z}[\underline{x}]$ a des coefficients de degré $\leq d$ et de hauteur $\leq e^h$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ des nombres réels, vérifiant

$$\mu_1 > \lambda_1 > 12 \ ; \quad \mu_2 > \lambda_2 > 12(q+1) ,$$

et

$$-d(\mu_1 h + \mu_2 d) \leq \log|\xi| \leq -d(\lambda_1 h + \lambda_2 d) .$$

On suppose que, pour tout polynôme non nul $R \in \mathbb{Z}[\underline{x}']$, de degré $\leq 2d^2$ et de hauteur $\leq \exp[2d(h + 2qd + 1)]$, on a

$$\log|R(\underline{x}')| \geq -\frac{d}{3}\left[\left(\frac{\lambda_1}{2} - 6\right)h + \left(\frac{\lambda_2}{2} - 6q - 6\right)d\right] .$$

Alors il existe un polynôme irréductible $Q \in \mathbb{Z}[\underline{x}]$ et un entier $s \geq 1$ tels que

$$- 3\delta d(\mu_1 h + \mu_2 d) \leqslant \log|Q(\underset{\sim}{x})| \leqslant - \frac{1}{6s} d(\lambda_1 h + \lambda_2 d) .$$

Démonstration. – Notons $X^\delta + u_{\delta-1} X^{\delta-1} + \dots + u_0$ le polynôme minimal de ξ sur $\mathbb{Z}[\underset{\sim}{x}]$; les polynômes $u_0 , \dots , u_{\delta-1}$ de $\mathbb{Z}[\underset{\sim}{x}]$ ont donc un degré $\leqslant d$ et une hauteur $\leqslant e^h$, et u_0 est la norme de ξ sur $\mathbb{Q}(\underset{\sim}{x})$. Comme

$$u_0 = - \xi . \sum_{i=1}^{\delta} u_i \xi^{i-1} \quad (\text{avec } u_\delta = 1),$$

on a

$$|u_0| \leqslant |\xi| . \delta . (d + 1)^q . e^h ,$$

d'où

$$\log|u_0| \leqslant - \frac{d}{2} [\lambda_1 h + \lambda_2 d] .$$

Grâce au lemme 2.4, il existe un polynôme irréductible $Q \in \mathbb{Z}[\underset{\sim}{x}]$ et un entier $s \geqslant 1$ tels que Q^s divise u_0 , et que

$$\log|Q^s(\underset{\sim}{x})| \leqslant - \frac{d}{6}(\lambda_1 h + \lambda_2 d) .$$

Supposons

$$\log|Q(\underset{\sim}{x})| < - 3\delta d(\mu_1 h + \mu_2 d) ;$$

nous voulons obtenir une contradiction.

Montrons que, pour $0 \leqslant j \leqslant \delta - 1$, on a

(2.9) $$\log|u_j| \leqslant - 2\delta d(\mu_1 h + \mu_2 d) .$$

La relation (2.9) est vérifiée pour $j = 0$: en effet, $Q(\underset{\sim}{x})$ divise u_0 , et le quotient a un degré $\leqslant d$, une hauteur $\leqslant e^{h+qd}$, donc une valeur absolue $\leqslant (d + 1)^q . e^{h+qd}$.

Supposons maintenant (2.9) vérifiée jusqu'au rang $j - 1$, $(1 \leqslant j \leqslant \delta - 1)$. Alors

$$- u_j = \xi^{\delta-j} + \sum_{i=0}^{j-1} u_i/\xi^{j-i} + \xi \sum_{\ell=j+1}^{\delta-1} \xi^{\ell-j-1} . u_\ell .$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence et à la minoration de $|\xi|$, on obtient :

$$\log|u_i/\xi^{j-i}| \leqslant - \delta d(\mu_1 h + \mu_2 d) , \quad 0 \leqslant i \leqslant j - 1 ;$$

comme

$$|u_\ell| \leqslant (d + 1)^q . e^h , \quad j < \ell < \delta ,$$

on en déduit

$$\log|u_j| \leqslant - \frac{d}{2} (\lambda_1 h + \lambda_2 d) .$$

Le lemme 2.3 montre que le résultant de u_j et de Q^s est nul ; donc Q divise u_j dans $\mathbb{Z}[\underset{\sim}{x}]$, et par conséquent

$$\log|u_j| \leqslant - 2\delta d(\mu_1 h + \mu_2 d) ,$$

ce qui démontre (2.9) pour $0 \leqslant j \leqslant \delta - 1$.

Comme

$$|\xi|^{\delta} \leqslant \sum_{j=0}^{\delta-1} |u_j|.|\xi|^{j-1} \ ,$$

on obtient

$$\log|\xi| < - d(\mu_1 h + \mu_2 d) \ ,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Nous utiliserons du lemme 2.8 la conséquence suivante.

PROPOSITION 2.10. - Soient a et ε des nombres réels, $a > 1$, $0 < \varepsilon < 1$. Il existe des nombres réels c_0 , c_1 , c_2 , dépendant de a , ε , $x_1 , \dots , x_q$, y , ayant la propriété suivante.

Soient (t_M) , $(\varkappa_M)$ deux suites croissantes de nombres réels, telles que

$$\varkappa_{M+1} \leqslant a\varkappa_M \ ; \quad t_{M+1} \leqslant a t_M \ ;$$

$$\lim_{M\to+\infty} \varkappa_M \geqslant c_0 \quad ; \quad \lim_{M\to+\infty} t_M = +\infty \ .$$

Soit N un entier suffisamment grand. On suppose qu'il existe une suite $(\xi_M)_{M\geqslant N}$ d'éléments de $\mathbb{Z}[x_1 , \dots , x_q , y]$, vérifiant, pour tout $M \geqslant N$,

$$t(\xi_M) \leqslant t_M \ ; \quad \log|\xi_M| \leqslant - \varkappa_M t_M^2 \ .$$

On suppose de plus que le premier élément de la suite, ξ_N , vérifie

$$\log|\xi_N| \geqslant - \varepsilon\varkappa_N t_N^2 \ . \tag{2.11}$$

Alors il existe un polynôme non nul $R \in \mathbb{Z}[\underline{x}']$ de taille $\leqslant c_1 t_N^2$, tel que

$$\log|R(\underline{x}')| \leqslant - c_2 \varkappa_N t_N^2 \ .$$

En particulier, si l'inégalité (2.11) est vérifiée non seulement pour N , mais aussi pour tout $M \geqslant N$, alors la proposition 2.1 montre que le degré de transcendance de K sur $\mathbb{Q}$ est supérieur ou égal à 3 .

La démonstration de la proposition (2.10) utilise de manière essentielle les idées de ČUDNOVSKIJ [4].

Démonstration de la proposition 2.10. - On démontre la proposition par l'absurde. Pour tout $M \geqslant N$, la norme P_M sur $\mathbb{Q}(\underline{x})$ de ξ_M vérifie (cf. [10], lemme 4.2.20)

$$P_M \in \mathbb{Z}[\underline{x}] \ ; \quad t(P_M) \leqslant c_3 t_M \ ;$$

$$\log|P_M(\underline{x})| \leqslant - c_4 \varkappa_M t_M^2 \ .$$

De plus, pour $M = N$, grâce au lemme 2.8 et à l'hypothèse (2.11), il existe un diviseur Q^s de P_N , puissance d'un polynôme irréductible Q , tel que

$$- c_6 \varkappa_N t_N^2 \leqslant \log|Q^s(\underline{x})| \leqslant - c_5 \varkappa_N t_N^2 \ .$$

Notons

$$\Delta_N = - \log|Q(\underline{x})| \ .$$

Comme

$$s\Delta_N \geqslant c_5\, \varkappa_N\, t_N^2 ,$$

et que

$$st(Q) \leqslant 2t(P_N) \leqslant 2c_3\, t_N ,$$

on a

(2.12) $$(c_5/2c_3)\varkappa_N\, t_N\, t(Q) \leqslant \Delta_N \leqslant c_6\, \varkappa_N\, t_N^2 .$$

Soit c_7 une constante suffisamment grande, et soit M le plus grand entier tel que

$$\varkappa_M . t_M . t(Q) \leqslant c_7\, \Delta_N ;$$

ainsi

$$c_7\, \Delta_N < \varkappa_{M+1} . t_{M+1} . t(Q) \leqslant a^2 . \varkappa_M\, t_M\, t(Q) ,$$

et $M \geqslant N$ dès que $c_7 \geqslant 2c_3/c_5$.

Soit j $(j \geqslant 0)$ la plus grande puissance de Q qui divise P_M :

$$P_M = Q^j . S .$$

On a :

$$jt(Q) \leqslant 2t(P_M) \leqslant 2c_3\, t_M ,$$

grâce à (2.6), donc

$$\begin{aligned} j.\log|Q(\underline{x})| &\geqslant - 2c_3 \frac{t_M}{t(Q)} \Delta_N > - (2c_3\, a^2 /c_7)\varkappa_M\, t_M^2 \\ &> - \frac{1}{2} \varkappa_M\, t_M^2 \end{aligned}$$

si $c_7 > 4c_3\, a^2$. D'où

$$\log|S(\underline{x})| \leqslant - \frac{1}{2} \varkappa_M\, t_M^2 .$$

Soit $p = 1 + [(\varkappa_N\, t_N^2/\Delta_N)]$; ainsi p est un entier positif tel que

$$\log|Q^p(\underline{x})| \leqslant - \varkappa_N\, t_N^2 .$$

Considérons le résultant R de Q^p et de S par rapport à x_q . Ce résultant n'est pas nul (puisque Q ne divise pas S), et on vérifie facilement

$$\begin{aligned} t(Q^p).t(S) &\leqslant 2p.t(Q)\, t(S) \leqslant 4pt(Q)\, t(P_M) \leqslant 4c_3\, pt(Q)\, t_M \\ &\leqslant 4c_3 . t_N^2 . c_7 . \frac{1}{\varkappa_M} (1 + c_6)\varkappa_N < 4c_3(1 + c_6)c_7\, t_N^2 ; \end{aligned}$$

on obtient

$$t(R) \leqslant c_8\, t_N^2$$

$$\log|R(\underline{x}')| < - c_9\, \varkappa_N\, t_N^2 ,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

3. Indépendance de $\exp(u_i.v_j)$.

Soient $u_1, \ldots, u_n$ des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants ; soient $v_1, \ldots, v_m$ des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Notons

$$\varkappa_1 = \frac{mn}{m+n},$$

et désignons par q_1 le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps

$$K_1 = \mathbb{Q}(\exp(u_i\, v_j)\ ;\quad 1 \leqslant i \leqslant n\,,\quad 1 \leqslant j \leqslant m)\,,$$

obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ les $m.n$ nombres $\exp(u_i\, v_j)$.

Rappelons les minorations connues de q_1 (voir par exemple [1], §1, ou [10], §7.1)

$$\varkappa_1 > 1 \Longrightarrow q_1 \geqslant 1\ ;$$

$$\varkappa_1 \geqslant 2 \Longrightarrow q_1 \geqslant 2\ ;$$

plus généralement, si L_1 est un sous-corps de K_1 de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$, et si on note $\dim_{L_1} K_1$ le degré de transcendance (dimension algébrique) de K_1 sur L_1, on a

$$\varkappa_1 \geqslant \tau > 1 \Longrightarrow \dim_{L_1} K_1 \geqslant 1\ ;$$

$$\varkappa_1 \geqslant 2\tau \Longrightarrow \dim_{L_1} K_1 \geqslant 2\ .$$

Grâce aux propositions 2.1 et 2.2, tous ces résultats sont des conséquences faciles du théorème suivant ([10], théorème 7.1.6).

THÉORÈME 3.1. - Soit t une taille sur le corps K_1 obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ les $m.n$ nombres $\exp(u_i\, v_j)$, $(1 \leqslant i \leqslant n\,,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$. Si $\varkappa_1 = mn/(m+n)$ vérifie $\varkappa_1 > 1$, alors il existe une suite $(\xi_N)_{N \geqslant N_0}$ d'éléments non nuls de K_1 vérifiant :

$$\log|\xi_N| \ll -N^{mn} \log N$$

et

$$t(\xi_N) \ll N^{m+n}\ .$$

Nous nous proposons de démontrer qu'il est possible d'éliminer un des éléments d'une base de transcendance de K_1 sur $\mathbb{Q}$, quitte à élever la taille au carré. Nous utiliserons les notations suivantes : pour $\underline{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{Z}^n$ (resp. $\underline{h} = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbb{Z}^m$) , on note

$$|\underline{\ell}| = \textstyle\sum_{i=1}^n |\ell_i|\,,\quad (\text{resp. } |\underline{h}| = \sum_{j=1}^m |h_j|)\,,$$

et

$$\underline{\ell}.\underline{u} = \textstyle\sum_{i=1}^n \ell_i\, u_i\quad (\text{resp. } \underline{h}.\underline{v} = \sum_{j=1}^m h_j\, v_j)\ .$$

THÉORÈME 3.2. - On suppose $\varkappa_1 \geqslant 2$, et

(3.3) $$\log \min_{|\underline{\ell}| \leqslant \Lambda} |\underline{\ell}.\underline{u}| \gg -\log \Lambda \quad \text{pour} \quad \Lambda \longrightarrow +\infty$$

(3.4) $$\log \min_{|\underset{\sim}{h}|\leq H} |\underset{\sim}{h}.\underset{\sim}{v}| \gg -\log H \quad \underline{\text{pour}} \quad H \longrightarrow +\infty .$$

Soit $(x_1, \dots, x_{q_1})$ une base de transcendance de K_1 sur $\mathbb{Q}$. Il existe une suite $(\theta_N)_{N\geq N_0}$ d'éléments non nuls de $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{q_1-1}]$, vérifiant

$$\log|\theta_N| \ll -N^{mn} \log N$$

et

$$t(\theta_N) \ll N^{2(m+n)} .$$

On en déduit trivialement

$$\varkappa_1 \geq 2 \Longrightarrow q_1 \geq 2 ,$$

et

$$\varkappa_1 \geq 2\tau \Longrightarrow \dim_{L_1} K_1 \geq 2 .$$

D'autre part, la proposition 2.1 donne le corollaire suivant, dû à ČUDNOVSKIJ [4] :

(3.5) Sous les hypothèses (3.3) et (3.4), on a

$$\varkappa_1 \geq 4 \Longrightarrow q_1 \geq 3 .$$

Enfin la proposition 2.2 permet de déduire du théorème 3.2 une généralisation de (3.5) :

(3.6) Sous les hypothèses (3.3) et (3.4), si L_1 est un sous-corps de K_1, de type de transcendance $\leq \tau$ sur $\mathbb{Q}$, on a

$$\varkappa_1 \geq 4\tau \Longrightarrow \dim_L K_1 \geq 3 .$$

Par exemple si t est un nombre transcendant vérifiant

$$\log \min_{|\underset{\sim}{\ell}|\leq \Lambda} |\ell_1 + \ell_2 t + \dots + \ell_n t^{n-1}| \gg -\log \Lambda ,$$

en choisissant $m = n$, $u_i = v_i = t^{i-1}$, on déduit de (3.5) pour $n = 8$:

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(e, e^t, e^{t^\tau}, \dots, e^{t^{14}}) \geq 3 ;$$

comme $\mathbb{Q}(e)$ a un type de transcendance ≤ 3 sur $\mathbb{Q}$ (voir [3]), le corollaire (3.6) donne, avec $n = 24$,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(e, e^t, e^{t^\tau}, \dots, e^{t^{46}}) \geq 4 .$$

ČUDNOVSKIJ annonce avoir démontré :

(3.7) $$\varkappa_1 \geq 2^\nu , \quad \nu \geq 1 \Longrightarrow q_1 \geq \nu + 1 .$$

On en déduit, pour $\mu \geq 3$,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(e, e^t, \dots, e^{t^{\mu-1}}) \geq (\log(\mu+1)/\log 2) - 1$$

donc

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(e, e^t, \dots, e^{t^{30}}) \geq 4 .$$

Remarquons que la conjecture de SCHANUEL implique :

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(e, e^t, \ldots, e^{t^{\mu-1}}) \geq \mu - 1 .$$

Démonstration du théorème 3.2. – L'idée de la démonstration est la suivante. Le théorème 3.1 montre l'existence d'une suite $(\xi_N^{(1)})$ d'éléments de l'anneau $A_0 = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{q_1}]$, vérifiant

$$\log|\xi_N^{(1)}| \ll - N^{mn} \log N ,$$
$$t(\xi_N^{(1)}) \ll N^{m+n} .$$

(On peut choisir pour $\xi_N^{(1)}$ la norme, sur $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_q)$, du produit de ξ_N par un dénominateur ∂_N de ξ_N). Si l'on construit une autre suite $(\xi_N^{(2)})$ vérifiant les mêmes relations, et telle que, pour tout N, $\xi_N^{(1)}$ et $\xi_N^{(2)}$ aient un résultant (par rapport à x_{q_1}) : $\theta_N \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{q_1-1}]$ non nul, le théorème 3.2 sera démontré.

Cette idée n'apparaîtra pas explicitement, car nous allons nous ramener aux propositions (2.7) et (2.10).

Pour effectuer cette construction de θ_N, on reprend la démonstration du théorème 3.1 (voir [10], §7.1). Nous notons $(x_1, \ldots, x_{q_1}, y)$ un système générateur de K_1 sur $\mathbb{Q}$ permettant de définir une taille t sur K_1 ; δ sera le degré de y sur $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_{q_1})$, et A_0, A seront les anneaux

$$A_0 = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{q_1}] , \quad A = A_0[y] .$$

Soit N un entier suffisamment grand (nous voulons construire θ_N), et soit $M \geq N$.

Premier pas. – Il existe des éléments

$$\varphi_M(\lambda) \in A_0 , \quad ((\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n ; \quad 0 \leq \lambda_i < 2\delta M^m) ,$$

premiers entre eux dans leur ensemble, de taille $\leq c_1 M^{m+n}$, tels que la fonction

$$F_M(z) = \Sigma_{(\lambda)} \varphi_M(\lambda) \exp[(\lambda.\underline{u})z]$$

vérifie

$$F_M(\underline{k}.\underline{v}) = 0 \quad \text{pour} \quad \underline{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m , \quad 1 \leq k_j \leq M^n .$$

Ce premier pas est une conséquence facile d'un lemme attribué à SIEGEL ([1], lemme 5.2, ou [10], lemme 4.3.1) ; après avoir obtenu une solution non triviale, on divise par le p. g. c. d. dans A_0.

Deuxième pas. – Il existe deux constantes positives c_2, c_3 telles que

$$\max_{(\lambda)} |\varphi_M(\lambda)| \leq M^{c_3 M^{mn}} . \max_{|\underline{k}| \leq c_2 M^n} |F_M(\underline{k}.\underline{v})| .$$

On déduit cette inégalité de (3.3), (3.4), et du théorème 1 de Tijdeman [9].

Nous noterons désormais ξ_M l'un des nombres $F_M(\underline{k}.\underline{v})$, $|\underline{k}| \leq c_2 M^n$, de module maximal ; ainsi $\xi_M \neq 0$, et

$$\log \max_{(\lambda)} |\varphi_M(\lambda)| \leqslant c_3 M^{mn}.\log M + \log|\xi_M| .$$

<u>Troisième pas</u>. - <u>Il existe une constante</u> $c_4 > 0$ <u>telle que</u>

$$\log|\xi_M| \leqslant - c_4 M^{mn}.\log M .$$

Pour démontrer ce troisième pas, on utilise le lemme de SCHWARZ et le principe du maximum (sur un disque de rayon M^{mn-m}), pour la fonction F_M , qui a beaucoup de zéros grâce à la construction du premier pas (voir [10], (4.4.6)).

<u>Conséquence</u>. - <u>Il existe une suite</u> $(\eta_M)_{M\geq N}$ <u>d'éléments non nuls de</u> A , <u>vérifiant</u>

$$\log|\eta_M| \leqslant - c_5 M^{mn}.\log M ,$$

<u>et</u>

$$t(\eta_M) \leqslant c_6 M^{m+n} .$$

On choisit $\eta_M = \partial_M \xi_M$, avec

$$\partial_M = \partial^{2\delta mn([c_2]+1)M^{m+n}} ,$$

où ∂ est un dénominateur commun des nombres $\exp(u_i v_j)$. Notons les inégalités

$$- c_7 M^{m+n} \leqslant \log \partial_M \leqslant c_8 M^{m+n} .$$

Nous nous intéressons maintenant à l'élément ξ_N , et nous distinguons deux cas.

<u>Cas</u> 1 : $\log|\xi_N| \leqslant - (c_3 + 1)N^{mn} \log N$.

Alors, d'après le deuxième pas, on a

$$\log \max_{(\lambda)} |\varphi_N(\lambda)| \leqslant - N^{mn} \log N ,$$

et la proposition 2.7 permet de construire θ_N .

<u>Cas</u> 2 : $\log|\xi_N| > - (c_3 + 1)N^{mn} \log N$.

Alors $\log|\eta_N| > - c_9 N^{mn} \log N$, et l'existence de θ_N résulte facilement de la proposition 2.10.

4. Indépendance de u_i , $\exp(u_i v_j)$.

Soient $u_1 , \dots , u_n$ (resp. $v_1 , \dots , v_m$) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Notons

$$\varkappa_2 = \frac{(m + 1)n}{m + n} ,$$

et désignons par q_2 le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps

$$K_2 = \mathbb{Q}(u_i , \exp(u_i v_j) ; \quad 1 \leqslant i \leqslant n , \quad 1 \leqslant j \leqslant m)$$

obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ les $(m + 1)n$ nombres u_i , $\exp(u_i v_j)$.

Les minorations connues de q_2 sont les suivantes ([1], §1, et [10], §7.2).

$$\varkappa_2 > 1 \Longrightarrow q_2 \geq 1 ;$$

$$\varkappa_2 \geq 2 \Longrightarrow q_2 \geq 2 ;$$

plus généralement, si L_2 est un sous-corps de K_2, de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$, on a

$$\varkappa_2 \geq \tau > 1 \Longrightarrow \dim_{L_2} K_2 \geq 1 ;$$

$$\varkappa_2 \geq 2\tau > 1 \Longrightarrow \dim_{L_2} K_2 \geq 2 .$$

Ces résultats sont des conséquences immédiates des propositions 2.1, 2.2, et du théorème suivant ([10], théorème 7.2.8, dans lequel on remplace N par N^{m+1} pour la clarté des notations).

THÉORÈME 4.1. - Si $\varkappa_2 > 1$, il existe une suite (ξ_N) d'éléments non nuls de K_2 telle que

$$\log|\xi_N| \ll - N^{(m+1)n}.\log N ,$$

et

$$t(\xi_N) \ll - N^{m+n}.(\log N)^{1/(m+1)} .$$

La méthode de ČUDNOVSKIJ permet de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2. - On suppose les relations (3.3) et (3.4) vérifiées. Notons $(x_1 , \dots , x_{q_2})$ une base de transcendance de K_2 sur $\mathbb{Q}$. Si $\varkappa_2 \geq 2$, il existe une suite (θ_N) d'éléments non nuls de $\mathbb{Z}[x_1 , \dots , x_{q_2-1}]$, vérifiant

$$\log|\theta_N| \ll - N^{(m+1)n}.\log N ,$$

et

$$t(\theta_N) \ll N^{2(m+n)}.(\log N)^{2/(m+1)} .$$

On en déduit

$$\varkappa_2 \geq 2 \Longrightarrow q_2 \geq 2 ,$$

$$\varkappa_2 \geq 2\tau \Longrightarrow \dim_{L_2} K_2 \geq 2 ,$$

ainsi qu'un résultat de ČUDNOVSKIJ [4] :

(4.3) $$\varkappa_2 \geq 4 \Longrightarrow q_2 \geq 3 .$$

La proposition 2.2 permet de généraliser (4.3) :

(4.4) $$\varkappa_2 \geq 4\tau \Longrightarrow \dim_{L_2} K_2 \geq 3 .$$

Voici un exemple d'application des corollaires 4.3 et 4.4 ; (comparer avec [10], exercice 7.2.e) : soient $\ell_1 , \dots , \ell_h$ $(h \geq 1)$ des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques $\alpha_1 , \dots , \alpha_h$. Soit β un nombre algébrique de degré d.

Si $d \geq 4 + (3/h)$, alors trois des hd nombres

$$\alpha_i^{\beta^k} = \exp(\ell_i\ \beta^k)\ ,\quad (1 \leqslant i \leqslant h\ ,\quad 1 \leqslant k \leqslant d)$$

sont algébriquement indépendants.

Si $d \geqslant 16 + (15/h)$, quatre des hd nombres

$$\alpha_i^{\beta^k}\ ,\quad (1 \leqslant i \leqslant h\ ,\quad 1 \leqslant k \leqslant d)$$

sont algébriquement indépendants.

On obtient ainsi les résultats annoncés au §1 : si β est un nombre algébrique de degré 7 , et si α est un nombre algébrique, $\alpha \neq 0$, $\log \alpha \neq 0$, trois des six nombres

$$\alpha^\beta\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha^{\beta^6}$$

sont algébriquement indépendants.

Le résultat plus général annoncé par ČUDNOVSKIJ [4] :

(4.5) $$\varkappa_2 \geqslant 2^\nu\ ,\ \nu \geqslant 1 \Longrightarrow q_2 \geqslant \nu + 1$$

impliquerait par exemple l'indépendance algébrique de quatre des 14 nombres

$$\alpha^\beta\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha^{\beta^{14}}\ ,$$

quand $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 15$, alors que le corollaire (4.4) , avec $\tau = 4 + \varepsilon$, donne seulement l'indépendance algébrique de quatre des 30 nombres

$$\alpha^\beta\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha^{\beta^{30}}\ ,$$

quand β est algébrique de degré 31 .

Il y a deux démonstrations du théorème 4.2, qu'il est facile d'écrire en utilisant le §4.2 de [10], et les propositions 2.7 et 2.1●.

5. Indépendance de u_i , v_j , $\exp(u_i\ v_j)$.

On considère toujours des nombres $u_1, \ldots, u_n$ et $v_1, \ldots, v_m$, $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et on note

$$\varkappa_3 = \frac{mn + m + n}{m + n}\ .$$

Soit

$$K_3 = \mathbb{Q}(u_i\ ,\ v_j\ ,\ \exp(u_i\ v_j)\ ;\quad 1 \leqslant i \leqslant n\ ,\quad 1 \leqslant j \leqslant m)$$

le corps obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ les $mn + m + n$ nombres u_i , v_j , $\exp(u_i\, v_j)$. Soit q_3 le degré de transcendance de K_3 sur $\mathbb{Q}$; on a ([1], §1, ou [10], §7.3) :

$$\varkappa_3 > 1 \Longrightarrow q_3 \geqslant 1\ ;$$

$$\varkappa_3 > 2 \Longrightarrow q_3 \geqslant 2\ ;$$

si $L_3 \subset K_3$ a un type de transcendance $\leqslant \tau$ sur $\mathbb{Q}$,

$$\varkappa_3 > \tau \Longrightarrow \dim_{L_3} K_3 \geq 1 ;$$
$$\varkappa_3 > 2\tau \Longrightarrow \dim_{L_3} K_3 \geq 2 .$$

Ces résultats sont des conséquences du théorème 7.3.4 de [10] :

THÉORÈME 5.1. - <u>Si</u> $\varkappa_3 > 1$, <u>il existe une suite</u> (ξ_N) <u>d'éléments non nuls de</u> K_3 <u>vérifiant</u>

$$\log|\xi_N| \ll - N^{mn+m+m} ;$$
$$t(\xi_N) \ll N^{m+n} .$$

Il est aussi possible de construire une suite d'éléments appartenant à un sous-corps de K_3 , de degré de transcendance $\leq q_3 - 1$ sur $\mathbb{Q}$.

THÉORÈME 5.2. - <u>On suppose vérifiées les relations</u> (3.3), (3.4), <u>et</u> $\varkappa_3 > 2$. <u>Si</u> $(x_1 , \ldots , x_{q_3})$ <u>est une base de transcendance de</u> K_3 <u>sur</u> $\mathbb{Q}$, <u>il existe une suite</u> (θ_N) <u>d'éléments non nuls de</u> $\mathbb{Z}[x_1 , \ldots , x_{q_3-1}]$ <u>vérifiant</u>

$$\log|\theta_N| \ll - N^{mn} ,$$

<u>et</u>

$$t(\theta_N) \ll N^{2(m+n)} .$$

La principale conséquence de ce théorème est due à ČUDNOVSKIJ :

(5.3) $$\varkappa_3 > 4 \Longrightarrow q_3 \geq 3 .$$

Plus généralement,

(5.4) $$\varkappa_3 \geq 4\tau \Longrightarrow \dim_{L_3} K_3 \geq 3 .$$

Ainsi, pour $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, trois des 12 nombres

$$e , e^{e^{\nu}} , \ldots , e^{e^{11\nu}}$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et quatre des 44 nombres

$$e., e^{e^{\nu}} , \ldots , e^{e^{43\nu}}$$

sont algébriquement indépendants.

On peut en fait déduire de l'inégalité

(5.5) $$\varkappa_3 > 2^{\nu} , \nu \geq 1 \Longrightarrow q_3 \geq \nu + 1 ,$$

~~annon~~cée par ČUDNOVSKIJ, l'indépendance algébrique de quatre des 28 nombres

$$e ; e^{e^{\nu}} , \ldots , e^{e^{27\nu}}$$

Remarquons enfin que la conjecture de Schanuel s'écrit

$$m \geq 1 \Longrightarrow q_3 \geq n .$$

Pour terminer, précisons qu'il est possible d'affaiblir les hypothèses (3.3) et (3.4) (en écrivant soigneusement les conditions dans lesquelles on peut utiliser le théorème 1 de [9] dans le deuxième pas de la démonstration), mais il semble difficile de les supprimer complètement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROWNAWELL (Dale). - Gel'fond's method for algebraic independence, Trans. Amer. math. Soc. (à paraître).

[2] BROWNAWELL (Dale) and WALDSCHMIDT (Michel). - The algebraic independence of certain numbers to algebraic powers (à paraître).

[3] CIJSOUW (Pieter L.). - Transcendence measures, Academisch Proefschrift, Academic Service, Amsterdam, 1972, 107 p. (Thesis Univ. Amsterdam, 1972).

[4] ČUDNOVSKIJ (G. V.). - Algebraic independence of some values of the exponential function [en russe], Mat. Zametki, t. 15, 1974, p. 661-672 ; [en anglais] Math. Notes, t. 15, 1974, p. 391-398.

[5] GEL'FOND (A. O.) et FEL'DMAN (N. I.). - Sur la mesure d'indépendance algébrique de certains nombres [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., t. 14, 1950, p. 493-500.

[6] GEL'FOND (A. O.). - Transcendental and algebraic numbers [en russe], Moskva, 1952 ; [en anglais] New York, Dover Publications, 1960.

[7] SMELEV (A. A.). - On the question of the algebraic independence of algebraic powers of algebraic numbers [en russe], Mat. Zametki, t. 11, 1972, p. 635-644 ; [en anglais] Math. Notes, t. 11, 1972, p. 387-392.

[8] SMELEV (A. A.). - Sur les propriétés arithmétiques des valeurs de la fonction exponentielle en des points non algébriques [en russe], Izvest. vysš. učebn. Zaved., Mat., 1973, n° 10 (137), p. 90-99.

[9] TIJDEMAN (Robert). - An auxiliary result in the theory of transcendental numbers, J. Number Theory, t. 5, 1973, p. 80-94.

[10] WALDSCHMIDT (Michel). - Nombres transcendants. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 402).

(Texte reçu le 26 mai 1975)

Michel WALDSCHMIDT
Mathématiques, Tour 45-46
Université Pierre et Marie Curie (Paris-VI)
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05